Sommario

Il documento consiste di alcuni appunti del corso di Geometria 2 dell'a.a 2015-2016. Alla fine del documento sono presentati e svolti alcuni esercizi di topologia generale.

Indice

Topologia

GGC
colabufo@mail.dm.unipi.it

4 luglio 2016

1 Introduzione

! Attenzione 1 !: Gli appunti non sono stati completamente rivisti e corretti, quindi potrebbero contenere errori anche gravi (spero di no)
! Attenzione 2 !: Alcuni esercizi e/o dimosttrazioni potrebbero contenere errori (di battitura o peggio) o imprecisioni. Si prega di segnalarli via mail e provvederò quanto prima a correggerli

2 Topologia generale

Premettiamo alcuni risultati, molti dei quali senza dimostrazioni (quando queste sono facili).

Lemma 2.1. *Sia X uno spazio topologico. Sia $\mathcal{C}$ una collezione di aperti di X tale che per ogni aperto U di X e per ogni $x \in U$, esiste un elemento C di $\mathcal{C}$ per cui $x \in C \subset U$. Allora $\mathcal{C}$ è una base per la topologia di X.*

Definizione Denotiamo la topologia *del limite inferiore* su $\mathbb{R}$, generata dagli intervalli della forma

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

con $\mathbb{R}_l$.

Definizione Posto $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e detto $\mathcal{B}$ l'insieme degli intervalli (a, b) e di quelli della forma $(a, b) - K$ (cioè elementi del tipo (a, b) che non sono in K), si consideri la topologia generata da $\mathcal{B}$. Tale topologia è chiamata *K-topologia* su $\mathbb{R}$ e per specificare che consideriamo $\mathbb{R}$ dotato di questa topologia scriviamo $\mathbb{R}_K$.

Lemma 2.2. *Le topologie di $\mathbb{R}_l$ e $\mathbb{R}_K$ sono strettamente più fini della topologia euclidea su $\mathbb{R}$ e non sono comparabili tra loro.*

Definizione Sia X un insieme (con più di un elemento) con una relazione d'ordine su di esso. Sia $\mathcal{B}$ la collezione di insiemi dei seguenti tipi:

- (a, b);
- $[a_0, b)$ dove a_0 è l'elemento minimo (se esiste) di X;
- $(a, b_0]$ dove b_0 è l'elemento massimo (se esiste) di X.

La collezione $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X, detta *topologia d'ordine*.

Teorema 2.3. *Se $\mathscr{B}$ è una base per la topologia su X e $\mathscr{C}$ è una base per la topologia su Y, allora la collezione di insiemi*

$$\mathscr{D} := \{B \times C \mid B \in \mathscr{B}, C \in \mathscr{C}\}$$

è una base per la topologia prodotto $x \times Y$.

Teorema 2.4. *Se A è un sottospazio di X e B è un sottospazio di Y, allora la topologia prodotto su $A \times B$ è la stessa topologia indotta da quella di sottospazio di $X \times Y$.*

Osservazione Se Y è un sottospazio di X e A un sottoinsieme di Y, la topologia su A come sottospazio di Y è la stessa di A come sottospazio di X.

Osservazione Siano X e X' insiemi dotate di topologie rispettivamente $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t}'$, e siano Y e Y' dotati delle topologie $\mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u}'$. $(X, X', Y, Y' \neq \varnothing)$. Se $\mathfrak{t}'$ è più fine di $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{u}'$ è più fine di $\mathfrak{u}$ allora la topologia prodotto su $X' \times Y'$ è più fine di quella su $X \times Y$.

Prova. □

Osservazione Il viceversa dell'osservazione precedente è in generale falso: si consideri il caso $X = \mathbb{R}$ e $Y = X' = Y' = \mathbb{R}_l$. $X' \times Y'$ ha una topologia *strettamente* più fine di $X \times Y$ ma per i singoli fattori non vale lo *strettamente*.

Osservazione Si consideri il seguente sottospazio topologico di $\mathbb{R}$:

$$Y = [0, 1] \cup (2, 3)$$

In Y l'insieme $[0, 1]$ è aperto perché intersezione dell'aperto di $\mathbb{R}(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ con Y. Analogamente $(2, 3)$ è chiuso in Y. In realtà i due sottoinsiemi considerati sono entrambi aperti e chiusi in Y, come si può verificare facilmente. Questo esempio è utile da ricordare: *qual è la differenza tra un insieme e una porta? La porta può essere aperta* ***o*** *chiusa; un insieme può essere aperto, chiuso, entrambe le cose, o nessuna delle due.*

Teorema 2.5. *Sia A un sottoinsieme dello spazio topologico X.*

a) $x \in \overline{A}$ se e solo se ogni aperto U contenente x interseca A.

b) Se la topologia su X è generata da una base, $x \in \overline{A}$ se e solo se ogni elemento della base B che contiene x interseca A.

Osservazione Ogni funzione da uno spazio con la topologia discreta è continua.
Ogni funzione a valori in uno spazio indiscreto è continua.
Se $f \colon X \to \mathbb{R}$ è continua, X ha la topolgia discreta.

Dimostrazione. Dimostriamo l'ultima affermazione. $\forall x \in X$, sia $f_x \colon X \to \mathbb{R}$ data da

$$f_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x \\ 0 \text{se } y \neq x \end{cases}$$

Allora f_x è continua e preso l'intorno $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ di 1 abbiamo che $f_x^{-1}\big((\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\big) = \{x\}$ è un intorno aperto di x, e questo prova che X ha la topologia discreta. □

Osservazione Sia $f \colon (X, \tau) \to (X, \tau')$ una funzione continua. Se τ è meno fine di τ_1, ogni $f \colon (X, \tau_1) \to (X, \tau')$ è continua; se τ_2 meno fine di τ' ogni $f \colon (X, \tau) \to (X, \tau_2)$ è continua.

Osservazione $f\colon \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau)$ dove τ è la topologia indiscreta, tale che $f(x) = 1$. Allora f è continua, non è aperta e non è chiusa. Infatti, $f\big((0,1)\big) = \{1\}$ e $f\big([0,1]\big) = \{1\}$ ma $\{1\}$ non è né aperto né chiuso.

Osservazione Se X è uno spazio topologico discreto e Y uno spazio topologico indiscreto, la topologia prodotto su $X \times Y$ non è né quella discreta né quella indiscreta. Infatti una base della topologia prodotto è data da $\mathcal{B} = \big\{\{x\} \times Y\big\}$ e la topologia generata è discreta se e solo se Y è costituito da un solo punto, indiscreta se $X = \{x\}$.

Osservazione Uno spazio *quasi-compatto* è uno spazio *non* T_2 in cui da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Uno spazio *quasi-compatto* non differisce da uno spazio *compatto* solamente per la separazione. Infatti un sottospazio *quasi-compatto* di uno spazio *quasi-compatto* non è necessariamente chiuso, e la sua chiusura non è necessariamente quasi-compatta.

Teorema 2.6. *In uno spazio localmente compatto di Hausdorff ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni compatto.*

Dimostrazione. Sia X lo spazio localmente compatto e sia $x \in X$. Esiste allora $K \in \mathcal{I}(x)$ compatto. K è regolare nella topologia di sottospazio, dunque x possiede un sistema fondamentale di intorni chiuso - e qunidi compatto - in K. Essendo K un intorno di x, questo è un sistema fondamentale di intorni compatto di x anche in X. $\square$

***

2.1 Contenimenti stretti e uguaglianze

Sia (X,τ) uno spazio topologico e siano A, B sottoinsiemi di X. É facile verificare che valgono le seguenti proprietà:

1. $\partial(A \cup B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$
2. $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq A \overset{\circ}{\cup} B$
3. $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
4. $\overline{A \cup B} \ = \ \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
6. $D(A \cup B) = D(A) \cup D(B)$
7. $D(A \cap B) \subseteq D(A) \cap D(B)$.

Osserviamo come con opportuni intervalli A e B di $\mathbb{R}$ possiamo ottenere i contenimenti stretti:

1. $A := [a, b]$ e $B := [b, c]$.
2. $A := (a, b]$ e $B := (b, c)$.
3.
4. $A := (a, b)$ e $B := (b, c)$.
5. come sopra

3 Geometria proiettiva

3.1 Coordinate proiettive omogenee

Vediamo come mettere delle coordinate nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ in modo intrinseco, cioè in che modo possiamo identificare $\mathbb{P}(V)$ con $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ mediante un sistema di *coordinate proiettive omogenee*. Innanzitutto andiamo a ricavare qualche strumento che ci sarà utile.

Lemma 3.1. *Siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ e $\{w_1, \dots, w_k\}$ due $k-$uple di vettori paralleli (cioé tali che $v_i = \lambda_i w_i$ con $\lambda_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, k$) e siano v e w vettori tra loro paralleli. Allora*

- *$\{v_1, \dots, v_k\}$ sono indipendenti se e solo se lo sono $\{w_1, \dots, w_k\}$;*
- *$v \in Span(\{v_1, \dots, v_k\}) \iff w \in Span(\{w_1, \dots, w_k\})$.*

Definizione Un punto P dello spazio proiettivo si dice *dipendente* dai punti $P_1, \dots, P_k$ se $P \in Span(P_1, \dots, P_k)$.

Osservazione Due punti sono *dipendenti* se e solo se coincidono.

Definizione Si dice che i punti $P_1, \dots, P_k$ formano una base di $\mathbb{P}(V)$ se $P_i = [v_i]$ e $\{v_1, \dots, v_k\}$ sono una base di V.

Osservazione La scelta di una base di punti *NON* induce una identificazione di $\mathbb{P}(V)$ con lo spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Vediamo perché: fissati $n+1$ punti $P_0, \dots, P_n$ in $\mathbb{P}(V)$ indipendenti, scegliamo un rappresentante per la classe di equivalenza di ciascuno di essi:

$$P_i = [v_i].$$

Allora un qualunque punto $P = [v]$ di $\mathbb{P}(V)$ si potrà scrivere come:

$$v = x_0 v_0 + \dots + x_n v_n.$$

Se però scegliamo altri rappresentanti per le classi di equivalenza, siano $P_i = [w_i]$ e $P = [w]$, allora abbiamo che

$$\begin{aligned} w_i &= \lambda_i v_i \\ w &= y_0 w_0 + \dots + y_n w_n \\ w &= \lambda v \end{aligned}$$

da cui $y_i = \lambda_i \cdot \lambda^{-1} \cdot x_i$. Ma allora $[x_0, \dots, x_n] \neq [y_0, \dots, y_n]$ perché le due $(n+1)$-ple non sono proporzionali, e dunque l'applicazione $P \mapsto (x_0, \dots, x_n)$ non è ben definita.
Per risolvere questo problema, scegliamo un ulteriore punto U in modo che i vettori della $(n+2)$-pla $P_0, \dots, P_n, U$ siano a $n+1$ a $n+1$ indipendenti. Diciamo $U = [u]$. Risulta $u = \sum_i \alpha_i v_i$ con $\alpha_i \neq 0$ per ogni i. Con una opportuna scelta dei rappresentanti v_i, il punto U viene ad essere il vettore

con coordinate tutte uguali a 1.
Verifichiamo ora che l'applicazione di passaggio in coordinate

$$\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

è ben definita.
Prendendo altri rappresentanti per i punti $P_i = [\overline{v_i}]$ e $U = [\overline{u}]$, sempre facendo in modo che U abbia tutte coordinate 1 anche in questa base, si ha:

$$\overline{v_i} = \lambda_i v_i, \overline{u} = \lambda u, \overline{u} = \sum_i \overline{v_i}$$

e dunque

$$\overline{u} = \sum_i \overline{v_i} = \sum_i \lambda_i v_i = \sum_i \lambda v_i = \lambda u$$

da cui, per l'indipendenza lineare dei vettori v_i segue che $\lambda_i = \lambda \ \forall i$, e le due $(n+1)$-ple di vettori sono proporzionali.

Passando per lo spazio vettoriale V si dimostra facilmente la ***formula di Grassmann*** *per lo spazio proiettivo*:

$$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U \cup V).$$

Se A è una matrice $(n+1)\times(n+1)$ invertibile, essa induce una applicazione lineare dallo spazio vettoriale V in se stesso, e questa passa al quoziente perché la controimmagine di 0 è il solo 0 e il parallelismo commuta con la linearità. Otteniamo allora il seguente risultato:

Teorema 3.2. *Due matrici A e B inducono lo stesso cambiamento di riferimetno proiettivo se e solo se $A = \lambda B$.*

Dimostrazione. Se vale $A = \lambda B$ è ovvio che le due matrici inducono lo stesso cambiamento di riferimento proiettivo. Viceversa, sia $\{P_0, \ldots, P_n, U\}$ un riferimento proiettivo e siano $Q_i = AP_i = BP_i, U' = AU = BU$. Se $P_i = [v_i]$ si vede che

$$Av_i = \lambda_i B v_i \quad \forall i = 0, \ldots, n$$

Dunque $\lambda_i v_i$ è una base di autovettori per la matrice $B^{-1}A$ che in questa base risulta essere diagonale. Il punto U viene conservato, perciç tutti gli elementi sulla diagonale devono essere uguali, cioè $B^{-1}A = \lambda I \Rightarrow A = \lambda B$. □

Sempre passando per lo spazio vettoriale sopraggiacente si prova il

Teorema 3.3. *Date due $(n+2)$-ple di punti in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ a $n+1$ a $n+1$ indipendenti, esiste un unica classe di matrici invertibili che portano l'una nell'altra.*

3.2 Il principio di *dualità*

Ad un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ può essere associata una $(n+1)$-pla a meno di un fattore di proporzionalità. Ciò significa che lo spazio degli iperpiani viene parametrizzato in modo naturale da uno spazio proiettivo, che non è altro che il proiettivizzato del duale $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.
Dunque $\mathbb{P}(V)$ parametrizza, oltre che le rette, anche gli iperpiani, per dualità.

Definizione Chiamiamo, in uno spazio proiettivo, *stella di iperpiani* di dimensione h un sottospazio lineare dello spazio proettivo duale.

Otteniamo allora il seguente

Teorema 3.4. *Una stella di iperpiani Σ_h di dimensione h è l'insieme di tutti e soli gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ passanti per un sottospazio lineare S_{n-h-1}, che sarà detto il* centro *della stella. Inoltre gli iperpiani passanti per un sottospazio lineare S_h formano una stella di iperpiani di dimensione $n-h-1$ di cui S_h è il centro.*

Osservazione Se $\Sigma(S_i)$ e $\Sigma(S_m)$ sono due stelle di iperpiani di centro rispettivamente S_i ed S_m, risulta

$$\Sigma(S_i) \subset \Sigma(S_m) \Longleftrightarrow S_m \subset S_i$$

che implica

$$\begin{aligned} \Sigma(S_i \cap S_m) &= \Sigma(S_i) \cup \Sigma(S_m) \\ \Sigma(S_i \cup S_m) &= \Sigma(S_i) \cap \Sigma(S_m) \end{aligned}$$

Tutto questo può essere riassunto in un teorema.

Teorema 3.5 (Principio di dualità). *Sia T un enunciato formulato in termini di* sottospazio, inclusione, intersezione, unione. *Allora se T è valido, è valido anche l'enunciato* duale *T^* ottenuto scambiando i sottospazi di dimensione h con quelli di dimensione $n-h-1$, rovesciando le inclusioni e scambiando unioni e intersezioni.*

3.3 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come varietà topologica

In uno spazio proiettivo è facile identificare i sottoinsiemi aperti $U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \colon x_i \neq 0\}$ con $\mathbb{R}^n$ tramite l'omeomorfismo

$$\begin{aligned} U_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_0, \dots, x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{aligned}$$

(dove in questo caso abbiamo supposto $i \neq 0$). Viceversa possiamo pensare ad una n-pla $(y_1, \dots, y_n)$ come rapporto di coordinate omogenee $(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$ che identificano $\mathbb{R}^n$ con l'aperto $U_i = \{x_i \neq 0\}$ del proiettivo.

Teorema 3.6. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *è di Hausdorff.*

Dimostrazione. $\forall P, Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ $P \neq Q$, esiste un iperpiano H tale che $P \notin H$ e $Q \notin H$. Ossia, $P, Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus H \cong \mathbb{R}^n$. Poiché $\mathbb{R}^n$ è T_2, esistono aperti U, V in $\mathbb{R}^n$ tali che $P \in U, Q \in V, U \cap V = \varnothing$, e U e V sono aperti anche in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ perché π è aperta. □

Teorema 3.7. *Ogni retta proiettiva di* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *è omeomorfa a* S^1.

Dimostrazione. Ogni retta proiettiva r è il quoziente di un piano W, ovvero di uno spazio vettoriale di dimensione 2 in $\mathbb{R}^{n+1}$. Sia $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n+1}$ un'applicazione lineare tale che $Im\varphi = W$. φ è iniettiva e passa al quoziente definendo un'applicazione continua

$$\overline{\varphi}\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

trasformazione proiettiva t.c. $Im(\overline{\varphi}) = r$. Allora $\overline{\varphi}\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to r$ è bigettiva e continua, e $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è compatto, $r \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2 e quindi $\overline{\varphi}$ è un omeomorfismo. Poiché $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è omeomorfo a S^1, $r \cong S^1$. □

Osservazione Ogni iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.8. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *è compatto e di Hausdorff.*

Dimostrazione. $\forall P, Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ esiste un iperpiano H che non contiene nè P nè Q. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus H$ è omeomorfo a $\mathbb{C}^n$ e quindi è T_2. Ciò permette di separare con aperti disgiunti P e Q. Mostriamo ora la compattezza. Si consideri l'inclusione

$$i\colon S^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

e su S^{2n+1} si consideri la relazione $\mathcal{R}$

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ t.c. } y = \lambda x.$$

Allora i è compatibile con le relazioni $\mathcal{R}$ su S^{2n+1} e $\sim$ su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, per cui passa al quoziente:

$$\begin{tikzcd}
S^{2n+1} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d] \\
S^{2n+1}/\mathcal{R} \arrow[r, "I"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

I è iniettiva e continua, inoltre I è surgettiva perché $\forall [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) [x] = I\big(\frac{x}{\|x\|}\big)$. Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è immagine continua di un compatto e quindi è compatto. Tra l'altro I è anche chiusa e quindi è un omeomorfismo (perché $S^{2n+1}/\mathcal{R}$ è compatto e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è T_2). □

Teorema 3.9. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *è omeomorfo a* S^2 *(sfera di Riemann).*

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\}$ (dove abbiamo indicato con ∞ il "punto all'infinito") è omeomorfo a $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \cong S^2 \setminus \{N\}$. Dato che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e S^2 sono compatti e T_2, per il lemma

> Se X e Y sono spazi topologici compatti e T_2, ed esiste f un omeomorfismo tra $X \setminus \{x\}$ e $Y \setminus \{y\}$, con $x \in X$e $y \in Y$, allora X e Y sono omeomorfi.

sono omeomorfi. □

3.4 La proiezione sghemba

Siano V, W sottospazi di $\mathbb{P}^n$ tali che $V \cap W = \varnothing$ e $\dim V + \dim W = n-1$. Se $V = \{P\}$ è un singolo punto, W è un iperpiano tale che $P \notin W$. Consideriamo la funzione $f_P \colon \mathbb{P}^n \setminus V \to W$ e sia r la retta per P e un fissato punto $Q \in \mathbb{P}^n \setminus V$. Allora $r \cap W = f_P(Q)$ consiste di un singolo punto. La funzione f_P è continua: per dimostrarlo, facciamo vedere che è continua su ogni carta U_i. $f_P\big|_{U_i \cap \mathbb{P}^n \setminus V}$ è continua per ogni $i = 0, \dots, n$: scegliamo un riferimento proiettivo $P_0, \dots, P_n, U$ dove $P_0 = P$ e $W = \{x_0 = 0\}$.

$$\begin{aligned}
f_P(Q) &= f_P\big([x_0, \dots, x_n]\big) \\
&= \big(\lambda[1, \dots, 0] + \mu[x_0, \dots, x_n]\big) \cap \{x_0 = 0\} \\
&= [\lambda + \mu x_0, \mu x_1, \dots, \mu x_n] \cap \{x_0 = 0\} \\
&\Rightarrow \lambda + \mu x_0 = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu x_0 \\
&= [0, \mu x_1, \dots, \mu x_n] \\
&= [0, x_1, \dots, x_n]
\end{aligned}$$

e se ci restringiamo alla carta U_i otteniamo il punto $[0, \frac{x_1}{x_i}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$ ed abbiamo una funzione continua nelle coordinate $x_0, \dots, x_n$.

3.5 Classificazione proiettiva delle Quadriche

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Sia p un polinomio omogeneo a coefficienti complessi. Gli insiemi $\{[x_0, \dots, x_n] \mid p(x_0, \dots, x_n) = 0\}$ e $\{[x_0, \dots, x_n] \mid p(x_0, \dots, x_n) \neq 0\}$ sono ben definiti in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, poiché sono saturi nello spazio vettoriale $\mathbb{C}^{n+1}$ e quindi passano al quoziente.

Osservazione Sia $p(x, y)$ un polinomio di grado d a coefficienti reali (o complessi) e consideriamo il suo luogo di zeri $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) = 0\} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p\big(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\big) = 0\}$. Il polinomio $P = x_0^d \cdot p\big(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\big)$ è omogeneo e il suo luogo di zeri contiene il luogo di zeri di p. Infatti se a_i per $i = 0, \dots, d$ sono i coefficienti di p, si ha che $x_0^d a_i \frac{x_1^n}{x_0^n} \frac{x_2^m}{x_0^m} = a_i x_1^n x_2^m x_0^{d-m-n}$ e quindi ogni monomio di P ha grado esattamente d.

Sia ora p un polinomio come sopra, di grado 2.

Definizione Una quadrica in $\mathbb{P}^n$ è il luogo di zeri di un polinomio omogeneo di grado 2.

Esiste una matrice in $GL(n+1, \mathbb{C})$ che trasforma il polinomio p in $x_0^2 + \dots + x_r^2$ con $r+1$ rango della forma bilineare. La quadrica si dice non degenere se $r = n$.

Osservazione Le quadriche non degeneri sono tutte omeomorfe tra loro perché esiste sempre una proiettività che manda l'una nell'altra.

Presa Q una quadrica degenere di rango $r+1$, consideriamo il sottospazio lineare H di equazioni $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, questo ha dimensione r. Se $A \in H, A = [x_0, \dots, x_r, 0, \dots, 0]$. Ora $Q \cap H$ è una quadrica non degenere in H ed ha equazione $x_0^2 + \dots + x_r^2 = 0$. Sia $H' = \{x_0 = \dots = x_r = 0\}$ tale che $H \cap H' = \varnothing$ e $H \cup H' = \mathbb{P}^n$.

Osservazione 1 $H' \subseteq Q$

Osservazione 2 Se A è un punto sulla retta che unisce un punto di H' con un punto di $Q \cap H$, allora $A \in Q$. Infatti, presi $B = [x_0, \dots, x_r, 0, \dots, 0] \in Q \cap H$ e $B' = [0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n] \in H'$, $A = \lambda B' + \mu B$ per certi λ e μ, quindi $A = [\mu x_0, \dots, \mu x_r, \lambda x_{r+1}, \dots, \lambda x_n]$ e $\mu^2 x_0^2 + \dots + \mu^2 x_r^2 = \mu^2(x_0^2 + \dots + x_n^2) = 0 \Rightarrow A \in Q$.

Se il rango di Q è $n-1$, H è un iperpiano ed H' un punto.
Se H è una retta, l'equazione di Q è $x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$.
Se H è un punto, Q ha equazione $x_0^2 = 0$, $H = [1, 0, \dots, 0]$ e $H' = \{x_0 = 0\}$.

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

In questo caso ci sono tre insiemi, a seconda del segno di $p(x_0, \dots, x_n)$: essendo il polinomio omogeneo di grado pari, il segno si conserva nel proiettivo.

Osservazione Notiamo che:

- p e $-p$ definiscono la stessa quadrica, poiché hanno lo stesso rango e la segnatura con i_+ scambiato con i_-;

- possiamo sempre supporre $i_+ \geq i_-$.

C'è sempre una proiettività che porta p in

$$x_0^2 + \cdots + x_{i_+}^2 - \cdots - x_r^2 = \sum_{j=0}^{i_+} x_j^2 - \sum_{j=1}^{i_-} x_j^2$$

con $r = i_+ + i_-$. Consideriamo anche stavolta il sottospazio lineare $H = \{x_{r+1} = \cdots = x_n = 0\}$. Allora $Q \cap H$ è una quadrica non degenere in H, e il sottospazio $H' = \{x_0 = \cdots = x_r = 0\}$ è il vertice.***

Si verifica che:

1. Tra le quadriche non degeneri c'è la quadrica $\varnothing$ di equazione $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$.

2. Se la quadrica è non degenere e $i_- = 1$, $x_0^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$ è dunque omeomorfa alla sfera S^{n-1} ed è perciò un compatto che non interseca l'iperperpiano $\{x_n = 0\}$ dunque è immergibile in $\mathbb{R}^n$ nella carta $x_n = 1$.

3. Tutte le quadriche sono coni su sfere di H: per ogni scelta di H e per ogni segnatura (con $i_+ \geq i_-$) ho una diversa forma della quadrica.

`Quadriche non degeneri in` $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ `e` $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

Nel caso reale non degenere, il rango della quadrica è 4 e ci sono tre possibili segnature (i_+, i_-, i_0):

a) $(4, 0, 0)$ che dà la quadrica vuota $\varnothing$;

b) $(3, 1, 0)$ che dà la quadrica omeomorfa alla sfera S^2;

c) $(2, 2, 0)$ che dà la quadrica omeomorfa al toro $S^1 \times S^1$.

Verifichiamo quanto detto:

a) L'equazione della quadrica è $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ che non ha soluzioni sui reali.

b) L'equazione della quadrica è $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ e osserviamo che $\{x_3 = 0\} \cap Q = \varnothing$ e il complementare dell'iperpiano è $\mathbb{R}^3$, dunque $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ e nelle coordinate non omogenee di $\mathbb{R}^3$, Q ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ che è proprio la descrizione della sfera S^2.

c) In questo caso vedere l'omeomorfismo è un po' più complicato. Partendo dall'equazione di Q $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, effettuiamo il cambio di coordinate proiettive:

$$\begin{cases} u_0 = x_0 + x_2 \\ u_1 = x_3 - x_1 \\ u_2 = x_0 - x_2 \\ u_3 = x_3 + x_1 \end{cases}$$

in modo che l'equazione di Q diventa: $u_0u_2 - u_1u_3 = 0$. Consideriamo ora le due famiglie di rette parametrizzate dai parametri λ, μ, a, b:

$$r_{[\lambda,\mu]} = \begin{cases} \lambda u_0 - \mu u_1 &= 0 \\ \mu u_2 - \lambda u_3 &= 0 \end{cases} \text{e} \quad s_{[a,b]} = \begin{cases} au_0 - bu_3 &= 0 \\ bu_2 - au_1 &= 0 \end{cases}$$

Tali famiglie giacciono sulla quadrica.

Osservazione Andiamo a verificare che:

1. $r_{[\lambda,\mu]} \cap s_{[a,b]} = \{P\}$ singolo punto, per ogni scelta dei parametri non entrambi nulli.
2. $r_{[\lambda,\mu]} \cap r_{[\lambda',\mu']} = \varnothing$ se $[\lambda, \mu] \neq [\lambda', \mu']$.
3. $s_{[a,b]} \cap s_{[a',b']} = \varnothing$ se $[a, b] \neq [a', b']$.

1. La matrice
$$M = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & -a & b & 0 \end{pmatrix}$$
ha rango 3, quindi il sistema ha soluzioni non banali e sono tutte proporzionali tra loro perché lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Quindi la soluzione del sistema è $[c_0, c_1, c_2, c_3]$ non nulla, cioè un punto della quadrica Q.
2. La matrice
$$N = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda \\ \lambda' & -\mu' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu' & -\lambda' \end{pmatrix}$$
è invertibile e la soluzione del sistema è solo $[0, 0, 0, 0]$.
3. Analogamente al punto precedente, la matrice
$$N' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & -a & b & 0 \\ a' & 0 & 0 & -b' \\ 0 & -a' & b' & 0 \end{pmatrix}$$
è invertibile e pertanto l'unico punto che è soluzione del sistema è $[0, 0, 0, 0]$.

Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow Q \\ \big([\lambda, \mu], [a, b]\big) &\longmapsto r_{[\lambda,\mu]} \cap s_{[a,b]} \end{aligned}$$

φ va da un compatto a un T_2, quindi se è continua è chiusa. Se mostriamo che è biunivoca, allora anche la sua inversa φ^{-1} sarà continua e dunque avremo provato che φ è un omeomorfismo.

INIETTIVITÀ $\big([\lambda,\mu],[a,b]\big) \neq \big([\lambda',\mu'],[a',b']\big) \Rightarrow \varphi\big([\lambda,\mu],[a,b]\big) \neq \varphi\big([\lambda',\mu'],[a',b']\big)$ poiché se $[\lambda,\mu] \neq [\lambda',\mu']$ le rette $r_{[\lambda,\mu]}$ e $r_{[\lambda',\mu']}$ sono sghembe e idem per $[a,b] \neq [a',b']$.

SURIETTIVITÀ $P_0 = [c_0,c_1,c_2,c_3] \in Q$ quindi $c_0c_2 = c_1c_3$. Prendiamo $[\lambda,\mu] = [c_1,c_0] = [c_2,c_3]$, $[a,b] = [c_3,c_0] = [c_2,c_1]$. Allora $r_{[\lambda,\mu]} \cap s_{[a,b]} = P_0$.

CONTINUITÀ Mettiamoci in una carta affine di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in cui $\lambda b \neq 0$: in questa carta le rette si scrivono come $r_{[1,k]}$ e $s_{[h,1]}$. Allora abbiamo che

- $c_0 : \mu = c_1 : \lambda$;
- $c_2 : \lambda = c_3 : \mu$;
- $c_3 : a = c_0 : b$;
- $c_2 : a = c_1 : b$.

da cui segue

$$\begin{cases} c_0 = kc_1 \\ c_3 = kc_2 \\ c_3 = hc_0 \\ c_2 = hc_1 \end{cases}$$

e in questa carta $\varphi\big([1,k],[h,1]\big) = [c_0,c_1,c_2,c_3]$ con $c_1 \neq 0$ (altrimenti si avrebbe $c_i = 0\ \forall i$).

$$\Rightarrow \begin{cases} c_0 = kc_1 \\ c_1 = c_1 \\ c_2 = hc_1 \\ c_3 = khc_1 \end{cases}$$

e le coordinate sono funzioni continue, dunque φ è continua nella carta $\lambda b \neq 0$. Con lo stesso ragionamento, otteniamo che φ è continua nelle carte $\lambda a \neq 0, \quad \mu b \neq 0, \quad \mu a \neq 0$. Essendo le quattro carte un ricoprimento di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, φ è continua ovunque e dunque la quadrica $Q \sim_{omeo} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \sim_{omeo} S^1 \times S^1$.

Osservazione In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la circonferenza S^1 e una retta sono *omeomorfe*, ma non *proiettivamente equivalenti*. Infatti non esiste alcun omeomorfismo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che manda l'una nell'altra.

Nel caso complesso invece, ho una sola quadrica non degenere che è quella di equazione

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

e cambiando coordinate

$$\begin{cases} x_0 = u_0 \\ x_1 = u_1 \\ x_2 = iu_2 \\ x_3 = iu_3 \end{cases}$$

e ragionando come nel caso reale, otteniamo che questa è omeomorfa a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \sim_{omeo} S^2 \times S^2$.

Osservazione Le quadriche complesse sono tutte rigate, cioè per ogni punto c'è una famiglia di rette per quel punto che giace sulla quadrica.

Dimostriamo che tutte le quadriche in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono connesse.
Pariamo dal caso $n = 2$. Sappiamo che essendo nel campo complesso, sono sempre non vuote, inoltre i casi degeneri sono coppie di rette o rette doppie, e quindi sono unioni di connessi a intersezione non vuota, dunque connesse. Allora prendiamo la conica non degenere C e un punto P_0 su di essa. Chiamiamo r una generica retta non passante da P_0 e definiamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus P_0 &\longrightarrow r \\ Q &\longmapsto QP_0 \cap r \end{aligned}$$

Questa è una funzione continua e la sua restrizione a $C \setminus P_0$ è biunivoca. Infatti se non fosse iniettiva, ci sarebbero due punti $P, Q \in C$ allineati con P_0 e questo non è possibile perch* una retta interseca una conica non degenere in soli due punti (un solo punto se è tangente). Inoltre è surgettiva perch* la sua immagine è $r \setminus (t_{P_0}C \cap r)$, (dove con $t_{P_0}C$ abbiamo indicato la retta tangente alla conica C nel punto P_0), ed è omeomorfa a $\mathbb{C}$.
Vediamo ora il caso $n = 3$. Sia Q una quadrica non degenere (quindi omeomorfa a $S^2 \times S^2$ e prodotto di connessi è connesso, ma verifichiamo la connessione in altro modo). Preso un punto $P_0 \in Q$, per P_0 passano due rette contenute nella quadrica:

$$r = P_0 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad s = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times P_0$$

allora $K = r \cup s$ è un piano. Prendiamo H un iperpiano di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ che non passi per P_0, e definiamo

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \setminus P_0 &\longrightarrow H \\ Q &\longmapsto P_0Q \cap H \end{aligned}$$

la cui restrizione su $Q \setminus P_0$ è costante su r e su s. Dunque $\varphi\big|_{Q\setminus(r\cup s)}$ è iniettiva ed ha un'inversa continua, ed è perciò un omeomorfismo. La sua immagine è omeomorfa a $\mathbb{C}^2$.

******* **Esempio** Consideriamo il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $z = 1$ e su di esso la parabola $y = x^2$. Il cono C di vertice l'origine fatto sulla parabola è dato dall'unione delle rette per i punti $(0, 0, 0)$ e $(t, t^2, 1)$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x &= st \\ y &= st^2 \\ z &= s \end{cases}$$

otttteniamo che (se $x \neq 0$) l'equazione del cono è $x^2 = yz$, che è proprio l'equazione della parabola in coordinate omogenee ($y = x^2 \to x_0 x_2 = x_1^2$). Tuttavia anche la retta $x = 0$ mi risolve l'equazione, dunque è come se avessi una retta in piú nel cono, e posso pensarla come la retta ottenuta proiettando dall'origine il punto della parabola all'infinito.

4 Esercizi

4.1 Esercizi di Topologia generale

Esercizio 1. *Caratterizzare tutte le possibili topologie su un insieme di due elementi.*

Soluzione. Detto $X := \{a, b\}$, abbiamo 4 possibili topologie su di esso:

$\mathfrak{t}_1 = \{\emptyset, X\}$ la topologia *banale* o *indiscreta*

$\mathfrak{t}_2 = \{\emptyset, aX\}$

$\mathfrak{t}_3 = \{\emptyset, bX\}$

$\mathfrak{t}_4 = \{\emptyset, a, b, X\}$ la topologia *discreta*

Il diagramma seguente mette in relazione le diverse topologie: la freccia va verso quella più fine; le topologie non confrontabili non sono collegate tramite alcuna freccia.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{t}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{t}_2 \arrow[d] \\ \mathfrak{t}_3 \arrow[r] & \mathfrak{t}_4 \end{tikzcd}$$

□

Esercizio 2. *Sia* $(X, \mathfrak{t})$ *uno spazio topologico tale che* $\mathfrak{t} = \{\emptyset, X, A, B\}$*. Quali condizioni devono soddisfare* A *e* B*?*

Soluzione. Bisogna avere $A \cap B \in \mathfrak{t}$, quindi ci sono tre possibilità:

- $A \cap B = \emptyset$ e dunque $A \cup B = X$, cioè $B = \complement A$
- $A \cap B = A$ e quindi $A \subseteq B$
- $A \cap B = B$ e quindi $B \subseteq A$.

□

Esercizio 3. *Sia* X *un insieme e* $\varphi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ *una funzione che verifica le seguenti proprietà:*

(V_1) $A \in \varphi(x)$ *e* $A \subseteq B \Rightarrow B \in \varphi(x)$

(V_2) $A, B \in \varphi(x) \Rightarrow A \cap B \in \varphi(x)$

(V_3) $A \in \varphi(x) \Rightarrow x \in A$

(V_4) $A \in \varphi(x) \Rightarrow \exists B \in \varphi(x)$ *tale che* $\forall y \in B : A \in \varphi(y)$.

Definiamo $\mathfrak{t} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in A,\ A \in \varphi(x)\}$*. Dimostrare che* $(X, \mathfrak{t})$ *è uno spazio topologico per il quale* $\varphi(x)$ *è l'insieme degli intorni di* x *per ogni* $x \in X$*.*

Soluzione. Dimostriamo innanzitutto che $(X, \mathfrak{t})$ è uno spazio topologico. $\emptyset \in \mathfrak{t}$ banalmente, e poiché $x \in X$ e $A \in \varphi(x)$, per (V_1) $X \in \mathfrak{t}$. Se $A_1 \ldots A_n \in \mathfrak{t}$, sia $x \in \bigcap_1^n A_i$. Allora si ha $x \in A_i \forall i = 1, \ldots n$ e quindi $A_i \in \varphi(x)$. Per (V_2) $A := \bigcap_1^n A_i \in \varphi(x)$. Infine se $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \mathfrak{t}$, esiste $j \in I$ tale che $x \in A_j \subset \bigcup_i A_i$ e per (V_1) $\bigcup_i A_i \in \varphi(x)$, cioè $\bigcup_i A_i \in \mathfrak{t}$. Sia ora $\mathcal{I}(x)$ l'insieme degli intorni di x in $(X, \mathfrak{t})$.

- $\mathcal{I}(x) \subseteq \varphi(x)$: se $A \in \mathcal{I}(x)$, $\exists U \in \mathfrak{t}$ tale che $x \in U \subseteq A$, dunque $U \in \varphi(x)$ e per (V_1) $A \in \varphi(x)$.
- $\varphi(x) \subseteq \mathcal{I}(x)$: se $A \in \varphi(x)$, sia $U = \{y \in X \mid A \in \varphi(y)\}$. Si ha che $x \in U$ per (V_3) e $U \subseteq A$. Sia $y \in U \Rightarrow A \in \varphi(y)$ e per $(V_4) \exists B \in \varphi(y)$ tale che se $z \in B$, allora $A \in \varphi(z)$ (cioè $z \in B \Rightarrow z \in U$) da cui $B \subseteq U$. La proprietà (V_1) permette di concludere che $U \in \mathfrak{t}$. Allora $x \in U \subseteq A$ e $U \in \mathfrak{t} \Rightarrow A \in \mathcal{I}(x)$.

$\square$

Esercizio 4. *Sia X un insieme e $\varphi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ tale che $\varphi(a) = \{A \subseteq X \mid a \in A\} \, \forall a \in X$. Mostrare che φ verfica le proprietà $(V_1) - (V_4)$ enunciate nell'esercizio precedente. Quale topologia è definita in questo modo? Si definisca ora $\varphi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ come $\varphi(a) = \{X\} \, \forall a \in X$. Mostrare che anche stavolta φ verfica le proprietà $(V_1) - (V_4)$. Quale topologia si definisce in questo modo?*

Soluzione. Le quattro proprietà si verificano facilmente in entrambi i casi. La topologia nel primo caso è data da $\mathfrak{t}_1 = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in A : A \in \varphi(X)\} = \mathcal{P}(X)$ ed è dunque la topologia discreta. Nel secondo caso si ha $\mathfrak{t}_2 = \{\emptyset, X\}$ ed è la topologia banale. $\square$

Esercizio 5. *Sia X un insieme e $\varphi : \mathfrak{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una funzione che verifica gli assiomi di chiusura di Kuratowski:*

a) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$

b) $\forall A \mathcal{P}(X)$ $A \subseteq \varphi(A)$

c) $\varphi \circ \varphi = \varphi$

d) $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$.

Sia $\mathfrak{C} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \varphi(A) = A\}$ e sia $\mathfrak{t} = \big\{A \in \mathcal{P}(X), \complement A \in \mathfrak{C}\big\}$. Mostrare che $X \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{C}$, $\emptyset \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{C}$ e che $\mathfrak{t}$ è una topologia su X per la quale $\overline{A} = \varphi(A)$.

Soluzione. Gli assiomi che definiscono una topologia sono facili da verificare. Mostriamo che φ coincide con la chiusura.

- $\overline{A} \subseteq \varphi(A)$: sia $x \in \overline{A} : \forall V \in \mathcal{I}(x) V \cap A \neq \emptyset$, da cui $V \cap \varphi(A) \neq \emptyset$ poiché $A \subseteq \varphi(A)$. Allora $x \in \overline{\varphi(A)} = \varphi(A)$ (dalla *c)* $\varphi\varphi(A) = \varphi(A)$ cioè $\varphi(A) \in \mathfrak{C} \Rightarrow \complement\varphi(A) \in \mathfrak{t}$) perciò $x \in \varphi(A)$.

- $\varphi(A) \subseteq \overline{A}$: sia $x \in \varphi(A)$ e sia $V \in \mathcal{I}(x)$ aperto. Se per assurdo $V \cap A = \emptyset$, $A \subseteq \complement V \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(\complement V) = \complement V \Rightarrow \varphi(A) \cap V = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{\varphi(A)} = \varphi(A)$; allora necessariamente $V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$.

$\square$

Esercizio 6. *Descrivere una coppia di sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}$ tali che*

$$A \cap B = \varnothing, \quad \overline{A} \cap B \neq \varnothing, \quad A \cap \overline{B} \neq \varnothing$$

Soluzione. Si considerino $A = [a, b)$ $B = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$, per costruzione si ha: $A \cap B = \varnothing$, $\overline{A} \cap B = \{b\}$, $A \cap \overline{B} = \{a\}$. $\square$

Esercizio 7. *Siano $\mathfrak{t}_d$ e $\mathfrak{t}_s$ le topologie destra e sinistra rispettivamente. Mostrare che un'intersezione qualunque di aperti è aperta e che* $\sup\{\mathfrak{t}_d, \mathfrak{t}_s\} = \mathfrak{t}$ *topologia discreta.*

Soluzione. É sufficiente mostrarlo per gli aperti della base $\mathcal{B}_d = \{[x, +\infty) \mid x \in X\}$. Dunque $\bigcap_{i \in I} [x_i, +\infty) = \bigcup_{x \geq x_i \; i \in I} [x, +\infty)$ è un aperto. Siano U_i aperti: $\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (\bigcup_{h \in K_i} A_{i,k}) = \bigcup_{\lambda \in L} \bigcap_{i \in I} A_{i,\lambda_i}$ dove $L := \prod_{i \in I} K_i$ e $A_{i,\lambda_i} \in \mathcal{B}_d$. Dunque $\bigcap_{i \in I} A_{i,\lambda_i} = B_\lambda$ è un aperto e $\bigcap_{i \in I} U_i = \bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda$ è aperto. Lo stesso ragionamento vale per $\mathfrak{t}_s$. Ovviamente le due topologie $\mathfrak{t}_d$ e $\mathfrak{t}_s$ sono meno fini di quella discreta. Sia allora $\mathfrak{t}'$ una topologia più fine di $\mathfrak{t}_d$ e $\mathfrak{t}_s$: $\forall x \in X$ si ha $[x, +\infty) \in \mathfrak{t}_d$ dunque $[x, +\infty) \in \mathfrak{t}'$; $(-\infty, x] \in \mathfrak{t}_s$ quindi $(-\infty, x] \in \mathfrak{t}'$; se ne deduce che $x = (-\infty, x] \cap [x, +\infty) \in \mathfrak{t}'$. Ciò prova che $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$, topologia discreta. $\square$

Esercizio 8. *Trovare un esempio di uno spazio topologico $N1$ ma non $N2$ (dove con $N1$ ed $N2$ si intende uno spazio che soddisfi rispettivamente il primo o il secondo assioma di numerabilità).*

Soluzione. Possiamo considerare $\mathbb{R}$ munito della topologia discreta. Infatti $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x, e quindi lo spazio è $N1$. Ora, sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}$. Poiché $\forall x \in \mathbb{R}\, \{x\}$ è un aperto, è unione di elementi di $\mathcal{B}$, e quindi deve essere $\{x\} \in \mathcal{B}$. Ciò implica che $\{\{x\}\} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}$ ha cardinalità maggiore o uguale a quella di $\mathbb{R}$ e allora non è una base numerabile. Questo prova che lo spazio non è $N2$. $\square$

Esercizio 9. *Sia* $\mathbb{R}$ *munito della topologia* $\mathfrak{t}$ *generata dalla base di aperti* $\mathcal{B} = \{[x, y)\}$. *Si dimostri che* $(\mathbb{R}, \mathfrak{t})$ *è separabile e* $N1$.

Soluzione. $\mathbb{Q}$ è un aperto denso e numerabile di $\mathbb{R}$: se $x \in \mathbb{R}$ e V è un intorno di x, $V = \bigcup_{i \in I} V_i, V_i \in \mathcal{B}$. Dunque $x \in [y, z) \subseteq V$ e $[y, z) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Quindi $\mathbb{R}$ è separabile. Si verifica facilmente che $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{B}(x) = \{[x, y) \mid y \in \mathbb{Q}\}$ è un sistema fondamentale numerabile di intorni di x. □

Esercizio 10. *(Spazio* T_0 *ma non* T_1*). Sia* $X = \{1, 2\}$ *e definiamo su* X *una topologia* $\mathfrak{t} = \{\varnothing, X, \{1\}\}$. *Allora* X *è* T_0 *ma non* T_1.

Dimostrazione. X è T_0: siano $x, y \in X$ distinti. Allora senza perdere di generalità possiamo supporre che $x = 1$ e $y = 2$. Allora esiste $U_x = \{1\}$ un aperto contenente 1 ma non 2. X non è T_1: infatti non esiste un aperto U_y contentente 2 ma non 1. □

Esercizio 11. *Sia* U *un aperto in* X *e sia* A *un chiuso in* X. *Allora* $U \setminus A$ *è aperto e* $A \setminus U$ *è chiuso in* X.

Dimostrazione. $X \setminus (U \setminus A) = A \cup (X \setminus U)$ e un unione di chiusi è chiuso. Ne segue che il complementare $U \setminus A$ è aperto. $X \setminus (A \setminus U) = U \cup (X \setminus A)$ e unione di aperti è aperto. Segue che il complementare $A \setminus U$ è chiuso in X. □

Esercizio 12. *Uno spazio topologico* X *si dice* spazio di Lindelöf *se da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un ricoprimento numerabile. Dimostrare che:*

a) Ogni sottospazio chiuso di uno spazio di Lindelöf *è uno spazio di* Lindelöf.

b) Uno spazio $N2$ *è di Lindelöf.*

c) Un sottospazio di Lindelöf di uno spazio di Lindelöf non è necessariamente chiuso.

Dimostrazione a). Sia $\bigcup\limits_{i \in I} V_i$ un ricoprimente aperto del chiuso $A \subseteq X$. Abbiamo che per ogni i vale $V_i = A \cap U_i$ con U_i aperto in X. Allora $X = \complement A \cap \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ ricoprimento aperto, da cui ne possiamo estrarre un ricoprimento numerabile perché X è di Lindelöf. Allora se $J \subseteq I$ è il sottoinsieme numerabile degli indici corrispondente al ricoprimento di X, anche $\bigcup\limits_{j \in J} V_j$ è un ricoprimento aperto numerabile di A.
b) Sia $\{V_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Sia $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerabile di X. Allora per ogni $x \in X$, $\exists i_x \in I$ $x \in V_{i_x}$, ma essendo $\mathcal{B}$ una

base, $x \in B_{n_x} \subseteq V_{i_x}$. Dunque $X = \bigcup_{x \in X} B_{n_x}$, e da questo ricoprimento aperto posso estrarre un ricoprimento numerabile $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L}$ con $L \subseteq \mathbb{N}$ numerabile e con $B_\lambda = B_{n_x}$. Detto $i_\lambda \in I$ l'indice per cui $B_\lambda \subseteq V_{i_\lambda}$, $X = \bigcup_{\lambda \in L} V_{i_\lambda}$ e tale ricoprimento è numerabile.
c) Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea: è chiaramente di Lindelöf. Il sottospazio $[0, 1)$ non è chiuso, ma è anch'esso di Lindelöf. $\square$

Esercizio 13. *Due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico X si dicono* separati *se non sono aderenti, cioè se $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Dimostrare che:*

1. *Se F e G sono entrambi aperti o entrambi chiusi, allora $A = F \setminus G$ e $B = G \setminus F$ sono separati.*

2. *Se $A, B \subset X$ sono separati, allora A, B sono aperti e chiusi in $A \cup B$.*

Soluzione.

1. Sia $x \in \overline{A} \cap B = \overline{(F \setminus G)} \cap (G \setminus F)$. Allora $x \in \overline{F \cap (X \setminus G)} \subseteq \overline{F} \cap \overline{(X \setminus G)} = \overline{F} \cap (X \setminus \mathring{G}$. Ora, se F è chiuso, $\overline{F} = F \Rightarrow x \in F \cap (G \setminus F)$ che è assurdo, se invece G è aperto, $G = \mathring{G} \Rightarrow x \in (G \setminus F) \setminus \mathring{G}$ assurdo anche qui. Analogamente se $x \in \overline{B} \cap A = \overline{(G \setminus F)} \cap (F \setminus G) \Rightarrow x \in \overline{G \setminus F} = \overline{G \cap (X \setminus F)} \subseteq \overline{G} \cap \overline{(X \setminus F)} = \overline{G} \cap (X \setminus \mathring{F})$. Allora, se $F = \mathring{F} \Rightarrow x \in F \wedge x \notin \mathring{F}$, assurdo; se invece $\overline{G} = G \Rightarrow x \in \overline{G} \wedge x \notin G$, assurdo. Dunque $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$.

2. $(A \cup B) \cap \overline{A} = A \cup (B \cap \overline{A}) = A$ dunque A è chiuso in $A \cup B$, e allo stesso modo $B = B \cup (\overline{B} \cap A) = \overline{B} \cap (A \cup B)$ è chiuso in $A \cup B$. Poiché $A = (A \cup B) \setminus B$, A è il complementare di un chiuso e quindi è aperto. Idem per B.

$\square$

Esercizio 14. *Mostrare che se Y ha la topologia discreta, allora la topologia prodotto su $X \times Y$ coincide con la topologia dell'unione disgiunta $\bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$.*

Soluzione. La topologia dell'unione disgiunta è generata dalla famiglia di aperti $\mathcal{B} = \{A + B \colon = A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \mid A \text{ aperto in } X \text{ e } B \text{ aperto in } Y\}$. Un aperto della topologia prodotto è della forma $A \times B$ con $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ aperti. Appare evidente che ogni aperto di una topologia è aperto anche rispetto all'altra. $\square$

Esercizio 15. *Dire, motivando la risposta, se un insieme infinito con la topologia cofinita è di Hausdorff.*

Soluzione. No, non lo è mai. Infatti se $\forall x \neq y \; \exists U, V$ aperti tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$ allora i rispettivi complementari $\complement U = \{a_1, \ldots, a_m\}$ e $\complement V = \{b_1, \ldots, b_n\}$ sarebbero insiemi finiti, ma $U \cap V = \varnothing \Rightarrow \complement U \cup \complement V = X$

che per ipotesi è un insieme infinito. Assurdo.
Notiamo che se X fosse finito, la topologia cofinita coinciderebbe con la topologia discreta poiché $\forall x \in X \complement \{x\}$ è sarebbe un insieme finito. $\square$

Esercizio 16. *Siano X, Y spazi topologici, con Y di Hausdorff. Dimostrare che se esiste un'applicazione continua ed iniettiva $f\colon X \to Y$ allora anche X è di Hausdorff.*

Soluzione. La restrizione $f\colon X \to f(X)$ è continua, inettiva, (surgettiva) ed è tale che gli aperti di X sono tutti e soli quelli della forma $f^{-1}(A)$ con A aperto in $f(X)$. Dunque f induce un omeomorfismo tra X ed $f(X) \subset Y$. Essendo $f(X)$ un sottospazio di uno spazio di Hausdorff, è anch'esso di Hausdorff, e per l'omeomorfismo anche X lo è. $\square$

Esercizio 17. *Siano $f, g\colon X \to Y$ due applicazioni continue, Y di Hausdorff e $A \subset X$ un denso. Dimostrare che se $f(x) = g(x)$ $\forall x \in A$, allora $f = g$.*

Soluzione. Diamo due dimostrazioni: la prima *fatta a mano*, la seconda più elegante.
Sia $y \in X \setminus A$ tale che $f(y) \neq g(y)$. Allora $\exists U, V \subset Y$ aperti disgiunti tali che $f(y) \in U$ e $g(y) \in V$. Ma essendo A un denso di X, la sua immagine $f(A)$ è densa in $f(X)$, dunque $U \cap V \cap f(A) \neq \varnothing$ il che dà un assurdo. Dunque $f(y) = g(y)$ e $f = g$.
L'insieme $C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$ è chiuso (poiché $C = \phi^{-1}(\Delta)$ dove Δ è la diagonale di $Y \times Y$) e contiene A. Ne segue che $X = \overline{A} \subseteq C \subset X$ ovvero $C = X$. $\square$

Esercizio 18. *Sia $f\colon X \to Y$ continua e Y spazio di Hausdorff. Provare che il grafico $\Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ è chiuso nel prodotto.*

Soluzione. Consideriamo la funzione $\varphi\colon X \times Y \to Y \times Y$ data da $\varphi(x, y) = (f(x), y)$. Allora $\Gamma = \varphi^{-1}(\Delta)$. $\square$

Esercizio 19. *Uno spazio topologico X è detto* risolubile *se esistono due sottospazi complementari densi ($\overline{A} = \overline{\complement A} = X$). Detta χ_A la funzione caratteristica di A, dimostrare che:*

- *χ_A non è continua in alcun punto;*
- *$\chi_A\big|_A$ e $\chi_A\big|_{\complement A}$ sono continue.*

Soluzione. $\square$

Esercizio 20. *Sia $f\colon X \to Y$, dove X è compatto e Y di Hausdorff. Preso $y \in Y$, sia $U \subset X$ un aperto che contiene $f^{-1}(y)$. Allora esiste un intorno V di y tale che $f^{-1}(V) \subseteq U$.*

Soluzione. $C = X \setminus U$ è un chiuso che non incontra $f^{-1}(y)$. Segue che $f(C)$ è un chiuso che non contiene y. Sia V tale che $V \cap f(C) = \varnothing$ e $y \in V$. Allora $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(C) = \varnothing, C \subseteq f^{-1}(C) \Rightarrow f^{-1}(V) \subseteq U$. $\square$

Esercizio 21. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione aperta fra spazi topologici e sia $D \subset Y$ un sottoinsieme denso in Y. Provare che $f^{-1}(D)$ è denso in X.*

Soluzione. Poniamo $E := f^{-1}(D)$. E è denso in X se e solo se interseca ogni aperto di X. Supponiamo allora che esista un aperto $A \subseteq X$ disgiunto da E. Essendo f aperta, $f(E)$ è un aperto in Y che quindi incontra D. Allora $f^{-1}(D \cap f(A)) = E \cap A \neq \varnothing$. $\square$

Esercizio 22. *Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Mostrare che se X è separabile allora A, dotato della topologia di sottospazio, è separabile.*

Soluzione. X contiene un sottoinsieme D denso e numerabile. Essendo A un aperto, $D \cap A \neq \varnothing$ dunque $D \cap A$ è un sottoinsieme denso e numerabile di A. Infatti $\overline{D \cap A}^A = \overline{D}^X \cap A = X \cap A = A$. $\square$

Esercizio 23. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva fra spazi topologici. Provare che se X è a base numerabile allora ogni sottospazio di Y è separabile.*

Soluzione. Sia Z un sottospazo di Y. L'applicazione f manda il sottoinsieme denso e numerabile $D \subseteq X$ in un sottoinsieme denso e numerabile di Z: infatti l'immagine continua di un denso è densa. $\square$

Esercizio 24. *Siano X uno spazio di Hausdorff e A un sottospazio di X. Mostrare che se esiste un'applicazione continua $f\colon X \to A$ tale che $f\big|_A = id_A$ allora A è chiuso in X.*

Soluzione. L'insieme $C = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ è chiuso in X: $x \mapsto (x, f(x))$ è continua e C risulta essere la controimmagine della diagonale $\Delta \subset X \times X$ che è chiusa essendo X di Hausdorff. Ora basta notare che $C = A$ vedendo l'applizazione $f\colon X \to X$. $\square$

Esercizio 25. *Ogni spazio di Hausdorff finito ha la topologia discreta.*

Soluzione. Se $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, esiste un intorno di x_1 che lo separa da ogni altro x_i, e l'intersezione finita di tutti questi intorni è un aperto ed è proprio $\{x_1\}$. Analogamente per gli altri punti. $\square$

Esercizio 26. *Sia $\mathbb{R}$ munito della topologia τ i cui aperti sono della forma $[a, b)$. Allora $\mathbb{R}^2$ con la topologia prodotto è omeomorfo a $\mathbb{C}$ con la topologia τ e la relazione d'ordine $a + ib \leq c + id$ se $a \leq c$ e $b \leq d$.*

Soluzione. L'omeomorfismo è dato dall'applicazione ovviamente bigettiva

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\longmapsto x+iy \end{aligned}$$

e si ha: $f^{-1}([a+ib, c+id)) = [a,c) = [b,d)$ e $f([a,c)) = f([b,d)) = [a+ib, c+id)$. $\square$

Esercizio 27. *Sia $f\colon X \to Y$ continua con Y spazio di Hausdorff. Definiamo una relazione di equivalenza su X data da $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Mostrare che il quoziente $X/\sim$ è di Hausdorff.*

Soluzione. Detta $\pi\colon X \to X/\sim$ la proiezione canonica, si ha che $\pi(x) \neq \pi(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, quindi esistono due aperti disgiunti U, V che contengono rispettivamente $f(x)$ e $f(y)$. Ma gli aperti $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ sono saturi, dunque le loro proiezioni sono aperti disgiunti di $\pi(x)$ e $\pi(y)$. $\square$

Esercizio 28. *Sia X uno spazio topologico. Mostrare che la seguente implicazione è falsa: $A \subseteq X$ sottospazio separato $\Rightarrow \overline{A}$ sottospazio separato.*

Soluzione. Consideriamo $X = \{0,1,2\}$ con la topologia data dagli aperti $\{\varnothing, \{0\}, X\}$. Prendiamo $A = \{0\}$, questo è separato, inoltre è denso in X, ma la sua chiusura $\overline{A} = X$ non è separata. $\square$

Esercizio 29. *L'immagine continua di uno spazio separato non è necessariamente separato.*

Soluzione. Basta prendere come esempio l'applicazione identica da $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea in $\mathbb{R}$ con la topologia banale; si noti invece che una qualunque funzione costante tra questi spazi mantiene la proprietà di separazione (perché l'immagine è costituita da un solo punto). $\square$

Esercizio 30. *Sia $I = [-1,1] \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta. Consideriamo la relazione di equivalenza $x \sim y \iff x = y$ oppure $x = -y \neq \pm 1$. Si dimostri che la proiezione al quoziente è aperta e lo spazio $I/\sim$ è T_1 ma non T_2.*

Soluzione. Si verifica facilmente che le proiezioni di aperti sono aperti nel quoziente. Se $\pi(x) \neq \pi(y)$ e $|x| < |y|$, sia z tale che $|x| < z < |y|$, $\pi(y) \notin \pi((-z,z))$ che è un intorno di $\pi(x)$, analogamente se $|y| < |x|$ prendiamo z in modo che $|y| < z < |x|$ e $\pi(y) \notin \pi((z,1]) \ni \pi(x)$. Dunque lo spazio è T_1, tuttavia non è T_2 perché i punti $\pi(1) \neq \pi(-1)$ non hanno intorni disgiunti. $\square$

Esercizio 31. *É vero che se ogni sottoinsieme numerabile di uno spazio topologico X è chiuso allora la topologia su X è la topologia discreta?*

Soluzione. Se X è numerabile certamente sì: infatti per ogni punto $x \in X$ il complementare è un sottoinsieme numerabile e quindi chuso. Ne segue che $\{x\}$ è aperto e la topologia è quella discreta. Se invece X ha cardinalità più che numerabile, *** □

Esercizio 32. *Sia X uno spazio T_0. Ogni sottoinsieme finito e non vuoto di X ha un punto isolato. Se invece X non ha punti isolati, ogni aperto di X è infinito.*

Soluzione. Per induzione sul numero n dei punti. *** □

Esercizio 33. *Sia X un insieme infinito dotato della topologia cofinita*

$$\tau_{cof} = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ è finito}\} \cup \{\varnothing\}$$

Abbreviamo $(X, \tau_{cof}) = X_{cof}$.

1. *Le topologie $X_{cof} \times X_{cof}$ e $(X \times X)_{cof}$ coincidono?*

2. *$X_{cof} \times X_{cof}$ è compatto?*

3. *$X_{cof} \times X_{cof}$ è di Hausdorff?*

Soluzione.

1. No, le topologie non coincidono. Se A è un aperto in X_{cof}, $X \times A$ è aperto in $(X \times X)_{cof}$ ma non in $X_{cof} \times X_{cof}$.

2. Sì. Sappiamo che $X_{cof} \times X_{cof}$ è compatto se e solo se lo è X_{cof}, mostriamo che un insieme con la topologia cofinita è sempre compatto: sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X_{cof}. Allora $X_{cof} = \cup_i U_i$ e $X \setminus U_i$ ha cardinalità finita, dunque è possibile ricoprirlo con un numero finito di aperti di X_{cof}. Siano $U_1, \dots, U_m$. Allora $X_{cof} = U_1 \cup \dots \cup U_m \cup U_i$ è un sottoricoprimento finito.

3. $X_{cof} \times X_{cof}$ è di Hausdorff se e solo se lo è X_{cof}. Mostriamo che non lo è mai: se $x, y \in X_{cof}$ ed esistessero due aperti $U \ni x$, $V \ni y$ tali che $U \cap V = \varnothing$, allora $X = X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ ma se i due insiemi hanno cardinalità finita si ha un assurdo.

□

Esercizio 34. *Sia X uno spazio T_2 e localmente compatto. Allora ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni compatti.*

Soluzione. Sia $x \in X$, esiste un suo intorno compatto K. Dimostriamo che ogni spazio compatto e T_2 è regolare e che quindi ha la proprietà che ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi, e perciò compatti. Presi un chiuso F e un punto $y \notin F$, F è chiuso in un compatto e quindi è compatto; per la proprietà di separazione riusciamo a separare il compatto dal punto, e quindi riusciamo a separare i chiusi dai punti: questa è la definizione di spazio regolare. Dunque ora sappiamo che x ha un sistema fondamentale di intorni compatti in K, ed essendo lo stesso K un intorno di x, questo è un sistema fondamentale di intorni anche in X. □

Esercizio 35. *Sia A un sottoinsieme connesso di uno spazio X e sia B un altro sottoinsieme. Se $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cap \complement B \neq \varnothing$, mostrare che $A \cap \partial B \neq \varnothing$.*

Soluzione. Sappiamo che $X = A \cap \overline{B}$ e $Y = A \cap \overline{\complement B}$ sono chiusi in A e $X \cup Y = A$, dunque la loro intersezione $X \cap Y = A \cap \overline{\complement B} \cap \overline{B} = A \cap \partial B$ non èuò essere vuota. □

Esercizio 36. *Uno spazio topologico X è totalmente sconnesso se e solo se ogni chiuso con almeno due punti non è connesso.*

Soluzione. Sia $C(x)$ la componente connessa del punto x. Se X è totalmente sconnesso, $C(x) = \{x\}$ per ogni x e se F è un chiuso con almeno due punti, contiene due componenti connesse distinte e quindi è sconnesso. Viceversa ogni $C(x)$ è connessa e chiusa e dunque deve essere composta dal solo punto x. □

Esercizio 37. *Uno spazio totalmente sconnesso è T_1.*

Soluzione. Le componenti connesse sono chiuse. □

Esercizio 38. *Se X ha un numero finito di componenti connesse, allora per ogni $x \in X, C(x)$ è aperto e chiuso in X. Inoltre, se X è compatto e per ogni $xC(x)$ è aperta e chiusa, allora X ha un numero finito di componenti connesse.*

Soluzione. Le componenti connesse sono sempre chiuse, inoltre fissata una componente $C(x_i) = X \setminus \bigcup_{j \neq i}^{n} C(x_j)$ è un aperto perché complementare di un'unione finita di chiusi. Se lo spazio è compatto, le sue componenti connesse formano un ricoprimento aperto da cui possiamo estrarre un sottoricoprimento finito. Ma poiché le componenti connesse costituiscono una partizione di X, ciò significa che sono in numero finito. □

Esercizio 39. *Sia $Y = \prod_i X_i$ e sia $Y \ni x = (x_i)$. Allora la componente connessa $C(x) = \prod_i C(x_i)$.*

Soluzione. Il prodotto di connessi $\prod_i C(x_i)$ è connesso e contiene x, dunque è contenuto in $C(x)$. D'altronde vale anche il contenimento opposto poiché $\forall y = (y_i) \in C(x)$ le proiezioni sui singoli fattori sono conessi che contengono x_i, per cui $\pi_i(C(x)) \subseteq C(x_i)\ \forall i$ e quindi $y_i \in C(x_i)$. □

Esercizio 40. *Uno spazio discreto con più di un punto è localmente connesso e non connesso.*

Dimostrazione. Ovviamente lo spazio non è connesso, tuttavia un sistema fondamentali di intorni connessi di un punto x è dato da $\big\{\{x\}\big\}$. □

Esercizio 41. *Uno spazio finito X non può avere la seguente proprietà: $\exists a \in X$ tale che X non è localmente connesso in a.*

Soluzione. Supponiamo possibile che X abbia tale proprietà, allora sappiamo che esiste un intorno U di a non connesso che non contiene alcun intorno connesso. Esiste però un intorno V del punto a, strettamente contenuto in U con la stessa proprietà. Ma allora potremmo costruire una successione $V_1, \dots, V_n, \dots$, di intorni di carninalità sempre minore. Questo è un assurdo. $\square$

Esercizio 42. *Sia X uno spazio localmente connesso. Allora $\forall x \in X$ $C(x)$ è aperto e chiuso.*

Soluzione. $C(x)$ è chiuso ed è intorno di ogni suo punto, perché se $y \in C(x)$, esiste un intorno connesso $V_y \subset C(y) = C(x)$. $\square$

Esercizio 43. *Sia X uno spazio topologico localmente compatto. Per ogni $x \in X$ consideriamo K_x un suo intorno compatto. Allora $\{K_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento fondamentale.*

Soluzione. Sia A tale che $K_x \cap A$ è aperto in K_x per ogni $x \in X$. Allora, preso un qualsiasi $y \in A$, esiste K_y compatto con $y \in \overset{\circ}{K_y} \subseteq K_y$ e $K_y \cap A$ è aperto in K_y. Allora anche $W := A \cap \overset{\circ}{K_y}$ è aperto in $\overset{\circ}{K_y}$. Ora $W \subseteq \overset{\circ}{K_y} \subseteq X$ ed essendo aperto in un aperto è aperto in X. Allora per ogni $y \in A$ abbiamo trovato un intorno aperto W di y tutto contenuto in A, perciò A è aperto in X. Viceversa, se A è aperto in X, $A \cap K_x$ è aperto in K_x per definizione, dunque si ha la tesi. $\square$

4.2 Esercizi su spazi connessi e spazi compatti

Teorema 4.1. *Sia X uno spazio compatto di Hausdorff. Allora X è $T4$.*

Soluzione. Siano $A, B \subseteq X$ due chiusi disgiunti. $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ $\exists U_{a,b} \ni a$ $\exists V_{a,b} \ni b : U_{a,b} \cap V_{a,b} = \varnothing$. B è chiuso in un compatto, quindi compatto. Allora fisso $a \in A$ e trovo $b_1, \dots, b_r \in B$ tali che $B \subseteq V_{a,b_1} \cup \dots \cup V_{a,b_r}$. Detto $U(a) \colon = \bigcap_{i=1}^{r} U_{a,b_i}$ e $V(a) \colon = \bigcup_{i=1}^{r} V_{a,b_i}$. Quindi a e B sono separati tramite questi due aperti. Posto $U \colon = \bigcap_{j=1}^{r} U(a_j)$ e $V \colon = \bigcup_{j=1}^{r} V(a_j)$, U e V separano A e B, e $U \cap V = \varnothing$. Infatti, sia $z \in U \cap V$, allora $z \in U(a_j) \forall j$ e $z \in V(a_j)$ per qualche $j = k$. Ma $z \in V_{a_k,b_k} \cap U_{a_k,b_k} = \varnothing$ è assurdo. □

Esercizio 44. *Sia Y un sottospazio denso di uno spazio di Hausdorff X. Dimostrare che se Y è localmente compatto, allora Y è aperto in X.*

Soluzione. $\forall y \in Y$, sia K un intorno compatto di y. Allora esiste un aperto $U \subseteq K$. Consideriamo $\overline{U}$: questo è compatto in Y, quindi in X, quindi è un chiuso in X. Sappiamo che $\exists V$ aperto in X tale che $U = V \cap Y$. Se $V \subseteq Y$ ho la tesi. Altrimenti $V \setminus Y \neq \varnothing \Rightarrow V \setminus \overline{U} \neq \varnothing$ e quest'ultimo è un aperto che non interseca Y, ma ciò è assurdo. □

Esercizio 45. *Sia X la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{Z}$: $X = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Sia $a_n \in \mathbb{R}$ una successione con $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$. Esiste un omeomorfismo tra X e la successione a_n?*

Soluzione. Ordiniamo $\mathbb{Z}$ nel modo seguente: $0, 1, -1, \dots, k, -k, \dots$ e chiamiamo b_n l'n-esimo termine di questa successione. Possiamo costruire un omeomorfismo tra $b_n \to \infty$ e $a_n \to l$ in alcuni casi particolari. Ad esempio, se la successione $a_n = \frac{1}{n} \cup 0$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, basta mandare $b_0 \mapsto 2$ e $b_n \mapsto \frac{1}{n}$. Invece se la successione a_n fosse ad esempio costante ($a_n = l \forall n \in \mathbb{N}$) una costruzione del genere non è possibile. □

Esercizio 46. *Sia X uno spazio compatto, $U \subseteq X$ un aperto e $\{C_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi in X tale che $\bigcap C_i \subset U$. Allora c'è un numero finito di chiusi della famiglia la cui intersezione è contenuta in U.*

Soluzione. Consideriamo il ricoprimento $\bigcup_i (X \setminus C_i) \cup U = X$. Possiamo estrarne un sottoricoprimento finito $(X \setminus C_1) \cup \dots \cup (X \setminus C_s) \cup U = X$. Allora l'intersezione $C_1 \cap \dots \cap C_s \subset U$ come volevamo. □

Esercizio 47. *Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $\{A_n\}_{n \in N}$ una famiglia di compatti connessi tali che $A_{k+1} \subset A_k$ $\forall k \in N$. Allora l'intersezione $\bigcap_n A_n$ è connessa.*

Soluzione. Se $\bigcap_n A_n$ non fosse connessa, allora $\exists U, V$ aperti disgiunti di X tali che $\bigcap A_n \subseteq U \cup V$ e $\bigcap A_n \nsubseteq U$, $\bigcap A_n \nsubseteq V$. Quindi esistono $A_{n_1}, \dots, A_{n_s}$ tali che la loro intersezione $A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_s} \subset U \cup V$ *[per l'esercizio precedente]* e quindi possiamo supporre $A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_s} \subset U \Rightarrow \bigcap A_n \subset U$.

Esercizio 48. *Sia X uno spazio compatto, connesso e T_2, e sia $A \subseteq X$. Chiamata $\mathcal{F}\colon = \{Y \subset X \mid Y$ compatto, connesso $A \subseteq Y\}$, si provi che $\mathcal{F}$ possiede elementi minimali.*

Soluzione. Basta provarlo per le catene $\{Y_i\}$ linearmente ordinate per inclusione e applicare il lemma di Zorn. Sappiamo che $\bigcap Y_i \neq \varnothing$ perché l'intersezione contiene A, ed essendo intersezione di compatti connessi è compatta e connessa. Allora $\bigcap Y_i \in \mathcal{F}$ ed è minimale. $\square$

Esercizio 49. *Il gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$ non è compatto.*

Soluzione. La funzione determinante $det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ è continua. Per definizione si ha $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \mid det(M) \neq 0\}$, cioè $GL(n, \mathbb{R})$ è la controimmagine del sottospazio aperto $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$, ed è quindi un aperto. Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n^2}$ è compatto se e solo se chiuso e limitato, e quindi $GL(n, \mathbb{R})$ non è compatto. $\square$

Esercizio 50. *Sia $O(n)$ il gruppo ortogonale, costituito da tutte le matrici ortogonali $n \times n$ a coefficienti reali, e $SO(n)$ il gruppo speciale ortogonale, costituito da tutte le matrici di $O(n)$ con determinante $+1$. Allora $O(n)$ e $SO(n)$ sono gruppi topologici compatti.*

Soluzione. Ricordiamo che $O(n)$ è formato da tutte le matrici $A \in GL(n)$ tali che $AA^t = A^tA = I_n$. Dato che $O(n) \subset GL(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ basta mostrare che è chiuso e limitato. La moltiplicazione di matrici è continua, e chiaramente l'operazione di trasposizione induce un omeomorfismo $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, per cui la funzione

$$f\colon \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

definita da

$$A \longmapsto AA^t$$

si può scrivere come composizione di funzioni continue. Gli insiemi costituiti da singoli punti di $\mathbb{R}^{n^2}$ sono tutti chiusi, ed in particolare l'insieme $\{I_n\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ è chiuso. Dunque $f^{-1}(I_n)$ è un sottospazio chiuso di $\mathbb{R}^{n^2}$; ma $f^{-1}(I_n) = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid f(A) = I_n\} = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid AA^t = I_n\} = O(n)$ e dunque $O(n)$ è chiuso. Ora, si indichino con $a_{-1}, a_{-2}, \dots a_{-n}$ i vettori colonna di $A \in O(n)$. La condizione $AA^t = I_n$ si può riscrivere come

$$a_{-i} \cdot a_{-j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove $v \cdot w$ indica il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$, e dunque, considerando la prima equazione, si ha per ogni i

$$a_{-i} \cdot a_{-i} == a_{1,i}^2 + a_{2,i}^2 + \cdots + a_{n,i}^2 = 1$$

, e quindi $a_{i,j} = 1$ per ogni $i, j = 1, ..., n$. Ne segue che $\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n$, e dunque $O(n)$ è limitato nella metrica euclidea di $\mathbb{R}^{n^2}$. Non rimane che dimostrare che $SO(n)$ è compatto. Ma, dato che si può scrivere come la controimmagine di 1 mediante la funzione (continua) determinante $det\colon O(n) \to \mathbb{R}$, esso è un sottospazio chiuso di $O(n)$. Allora esso è compatto. □

Esercizio 51. *Quali sono i sottospazi connessi di uno spazio topologico dotato della topologia discreta?*

Soluzione. I singoli punti $\{x\}$. Infatti ogni singoletto $\{x\}$ è aperto e chiuso nella topologia discreta, quindi ogni insieme che contenga almeno due punti risulta sconnesso. □

Esercizio 52. *Siano A, B sottospazi di uno spazio topologico tali che $A \cup B$ e $A \cap B$ sono connessi. Provare che se A, B sono entrambi chiusi o entrambi aperti, allora anche A e B sono connessi.*

Soluzione. Notiamo innanzitutto che $A \cap B \neq \varnothing$, altrimenti lo spazio $A \cup B$ sarebbe unione di due aperti (risp. chiusi) disgiunti. Supponiamo A, B entrambi chiusi (l'altro caso è analogo). Se per assurdo A fosse sconnesso, potremmo scrivere $A = U \cup V$ con U, V chiusi disgiunti. Allora $A \cap B \subseteq U$ oppure $A \cap B \subseteq V$. Supponiamo il primo caso. Questo implica $B \cap V = \varnothing$, quindi $B \cup V$ è unione di chiusi e quindi chiuso in $A \cup B$ e soprattutto non è aperto poiché $A \cup B$ è connesso. Ma il suo complementare è $(A \cup B) \setminus (B \cup V) = U$ che è un chiuso. Assurdo. □

Esercizio 53. *Per ogni terna di punti $p, q, v \in \mathbb{R}^n$, il cammino*

$$\begin{aligned} \alpha_{p,q,v}\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (1-t)p + tq + t(1-t)v \end{aligned}$$

è un arco di parabola che ha p e q come estremi. Dimostrare che se $p \neq q$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{p, q\}$ esiste al più un vettore v ortogonale a $p - q$ e tale che x appartenga all'immagine del cammino $\alpha_{p,q,v}$.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che esistano due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ con la proprietà suddetta. Per semplicità, a meno di traslazioni possiamo sempre supporre $p = 0$ e dunque v, w ortogonali a q. Allora $\exists t, s \in [0,1]$ tali che

$$\begin{aligned} (1-t)p + tq + t(1-t)v = x = (1-s)p + sq + s(1-s)w \\ tq + t(1-t)v = sq + s(1-s)w \end{aligned}$$

e prendendo il prodotto scalare per q:

$$tq = sq \Rightarrow t = s$$
$$\Rightarrow v = w$$

$\square$

Esercizio 54. *Siano $n \geq 2$ e $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Denotiamo con $A = \{t \in f(S^n) \mid f^{-1}(t)$ ha cardinalità finita$\}$. Dimostrare che A contiene al più due punti.*

Soluzione. L'immagine continua di un connesso compatto è connessa e compatta. Un connesso compatto in $\mathbb{R}$ è necessariamente un intervallo chiuso $[a, b]$. Dunque se la cardinalità di A fosse almeno 3, $[a, b] = f(S^n)$ sarebbe sconnesso togliendo i tre punti di A, mentre un numero finito di punti non sconnette la sfera S^n. Allora si avrebbe che l'immagine di un connesso non sarebbe connessa, e questo è un assurdo.
Notiamo che la cardinalità di A può essere, a seconda della scelta di f, $0, 1$ o 2. La prima ipotesi si realizza se f è una funzione costante; l'ultima considerando la proiezione della sfera mediante rette parallele; infine la seconda deriva dalla composizione di una deformazione della sfera e della proiezione. $\square$

Esercizio 55. *Dimostrare che ogni omeomorfismo $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di ordine finito, ossia tale che $f^p = Id$ per qualche $p > 0$, possiede almeno un punto fisso.*

Soluzione. Posti $b := \max(0, f(0), f^2(0), \ldots, f^{p-1}(0))$ ed $a := f^{-1}(b)$, consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - x$ nell'intervallo $[a, b]$. Si verifica che $f(a) = b \geq a$, $f(b) \leq b$ e dunque $g(a) \geq 0, g(b) \leq 0$, cioè g si annulla in almeno un punto dell'intervallo e dunque f ha un punto fisso c che è il punto in cui $g(c) = 0$. $\square$

Esercizio 56. *Il toro, inteso come superficie a ciambella $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ ottenuta facendo ruotare il cerchio $(y - R)^2 + z^2 = r^2$ di centro $(R, 0), R > r$ del piano yz intorno all'asse z, è omeomorfo a $\mathbb{T}^2$ definito come il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ $S^1 \times S^1$.*

Soluzione. $\mathbb{T}^2$ è l'insieme $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Sia $F \colon \mathbb{T}^2 \to \mathcal{C}$ definita da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((R + rx_3)x_1, (R + rx_3)x_2, rx_4).$$

e sia $G \colon \mathcal{C} \to \mathbb{T}^2$ definita da

$$G(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{r}, \frac{z}{r} \right).$$

Si ha che F è un omeomorfismo dal toro alla superficie a ciambella, infatti F e G sono continue e facendo i calcoli si dimostra facilmente che $F \circ G = I_C$ e che $G \circ F = I_T$, dove I_C e I_T sono rispettivamente l'identità sulla superficie a ciambella e l'identità sul toro. $\square$

Esercizio 57. *Sia* $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico* X *tali che* $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ *per ogni* n. *Dimostrare che* $A = \cup_n A_n$ *è connesso.*

Soluzione. Per ogni n si ha che $A_n \cup A_{n+1}$ è connesso perchéunione di connessi a intersezione non vuota. Lo stesso ragionamento mostra che $A_{n-1} \cup A_n$ è connesso, e iterando il procedimento ottengo un unione numerabile di connessi a intersezione non vuota e perciò connessa. $\square$

Esercizio 58. *Sia* $\{A_i \mid i \in I\}$ *una famiglia di sottospazi non vuoti e connessi di uno spazio topologico* X. *Si dimostri che:*

1. *La famiglia* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ *formata da tutti i sottoinsiemi* $J \subset I$ *tali che l'unione* $\cup\{A_j \mid j \in J\}$ *è connessa, possiede elementi massimali rispetto all'inclusione.*

2. *Se per ogni coppia* $i, j \in I$ *esiste una successione di indici* $i_1, \dots, i_n \in I$ *tali che* $i_1 = i, i_n = j$ *e* $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \varnothing$ *per ogni* $k = 1, \dots, n-1$, *allora l'unione* $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ *è connessa.*

Soluzione.

1. Basta applicare il lemma di Zorn, osservando che ogni catena di sottoinsiemi di I ammette maggiorante.

2. Per l'esercizio precedente, ogni unione $\cup A_{i_k}$ è connessa e l'intersezione di due sottofamiglie A_{i_k} e A_{i_l} è non vuota.

$\square$

Esercizio 59. *Si dimostri che nello spazio metrico* $\mathbb{Q}$ *dotato della distanza euclidea, l'insieme* $K = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$ *è chiuso, limitato e non compatto.*

Soluzione. K è chiuso in quanto intersezione di $\mathbb{Q}$ con un chiuso di $\mathbb{R}$, limitato poichécontenuto in un intervallo di centro 1 e raggio 2 ma non è compatto: infatti il ricoprimento $\left(\frac{-1}{n}, \sqrt{2} - \frac{1}{n}\right)$ con $n > 1$ non ammette un sottoricoprimento finito. $\square$

Definizione Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{A}$ si un insieme X ha la ***proprietà dell'intersezione finita*** se per ogni sottofamiglia finita e non vuota $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ vale $\cap\{A \mid A \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$.

Esercizio 60. *Uno spazio topologico* X *è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietàdell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

Soluzione. Dimostriamo entrambe le implicazioni per assurdo. Supponiamo X compatto. Se C_n è una famiglia di chiusi tale che verifica la proprietà dell'intersezione finita e $\cap_n C_n = \varnothing$, allora $\cup_n \complement C_n$ è un ricoprimento aperto di X, da cui, essendo X compatto, posso estrarre un sottoricoprimento finito: $X = \complement C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_m}$. Ma allora $\cap_k^m C_{i_k} = \varnothing$ contro l'ipotesi. Viceversa, se X non fosse compatto, allora esisterebbe un ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ di X che non amette un sottoricoprimento finito. Ma allora i complementari di ogni $\{U_i\}_{i\in I}$ sono tali che $\cap_i^n C_i = \varnothing$ ma ogni sottofamiglia finita di essi ha intersezione non vuota, quindi avremmo una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita a intersezione vuota, e questo dà l'assurdo. □

Osservazione In particolare da questo si ottiene come corollario che

> **Proposizione**. Sia $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti in uno spazio topologico. Allora $\cap\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$.

Esercizio 61. *Siano X uno spazio topologico compatto e $f\colon \mathbb{R} \to X$ un'applicazione continua e chiusa. Dimostrare che esiste $x \in X$ tale che $f^{-1}(x)$ contiene infiniti elementi.*

Soluzione. Di sicuro esiste $x \in X$ tale che $f^{-1}(x)$ non è compatto, altrimenti avrei come conseguenza che $\mathbb{R}$ è compatto.

> **Teorema**. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione chiusa. Se Y è compatto e se $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$ allora anche X è compatto.

$f^{-1}(x)$ è controimmagine di un punto (chiuso ***), dunque è chiusa. Allora per non essere compatta deve essere $f^{-1}(X)$ non limitata e cioè deve contenere infiniti elementi. □

Osservazione In particolare una applicazione continua e chiusa $f\colon \mathbb{R} \to S^n$ non può essere iniettiva.

Esercizio 62. *Dimostrare l'equivalenza delle seguenti due definizioni di applicazione propria:*

1. *$f\colon X \to Y$ tale che $\forall K \subseteq Y$ compatto, $f^{-1}(K) \subseteq X$ compatto.*
2. *$f\colon X \to Y$ chiusa tale che $f^{-1}(y)$ è compatta per ogni $y \in Y$.*

Soluzione. Osserviamo che le due definizioni sono equivalenti solo sotto l'ipotesi aggiuntiva che Y sia uno spazio T_2 e localmente compatto (in particolare non vale l'implicazione $1 \Rightarrow 2$).
[$2 \Rightarrow 1$]. Sia $y \in K \subseteq Y$. Esiste un aperto U tale per cui la fibra $f^{-1}(y) \subseteq U$ e quindi $X \setminus U$ è un chiuso. Allora $f(X \setminus U)$ è un chiuso e $y \in Y \setminus f(X \setminus U)$

che è un aperto. Al variare di y in K, gli aperti di questo tipo formano un ricoprimento di K da cui posso estrarre un sottoricorimento finito. Questo implica che tali aperti sono immagine di solo un numero finito di aperti U_i di X e pertanto $f^{-1}(K)$ è compatto in X.
$[1 \Rightarrow 2]$. Sia $F \subseteq X$ un chiuso. Per ogni $y \in Y$ $\exists K_y \ni y$ intorno compatto di y. Allora $f^{-1}(K_y)$ è compatto e l'intersezione $F \cap f^{-1}(K_y)$ è un chiuso in un compatto, quindi compatto in $f^{-1}(K_y)$. L'immagine $f(F \cap f^{-1}(K_y) = f(F) \cap K_y$ è un compatto in K_y che è T_2, dunque è un chiuso in K_y. Sappiamo che al variare di $y \in Y$, i K_y formano un ricoprimento fondamentale, quindi $f(F)$ è chiuso in K_y se e solo se è chiuso in Y, e questo dà la tesi. □

Esercizio 63. *Dimostrare che* $X = \mathbb{R} \times [0, 1]$ *non è omeomorfo a* $Y = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$.

Soluzione. Considero l'esaustione in compatti di Y data da $K_n = \{(x, y) \in Y \mid x^2 + y^2 \leq n\}$. Se $f : Y \to X$ è un omeomorfismo, ogni compatto in X è contenuto in un $f(K_N)$ per un qualche N abbastanza grande. Ma $Y \setminus K_N$ ha una sola componente connessa, mentre $X \setminus D$ dove D è il compatto $[0, 1] \times [0, 1]$ ha due componenti connesse. □

Esercizio 64. *Mostrare che uno spazio topologico* X *è connesso se e soltanto se ogni sottoinsieme proprio e non vuoto di* X *ha frontiera non vuota.*

Soluzione. Se $A \subset X$ è un sottoinsieme proprio e non vuoto con frontiera $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \varnothing$ se e solo se $\overline{A} = \mathring{A} = A$ è aperto e chiuso in X se e solo se X non è connesso. □

Esercizio 65. *Siano* r *ed* s *due rette distinte del piano proiettivo reale* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. *Gli spazi topologici* r *e* $r \cup s$ *sono omeomorfi? Quante sono le componenti connesse di* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (r \cup s)$*?*

Soluzione. No, non sono omeomorfi infatti sappiamo che $r \cap s = \{P\}$ e $r \setminus \{P\}$ ha una sola componente connessa, mentre $(r \cup s) \setminus \{P\}$ ne ha 2. Il piano proiettivo si ottiene aggiungendo una retta a $\mathbb{R}^2$. A meno di omeomorfismo possiamo supporre che tale retta *impropria* sia r. Dunque $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (r \cup s) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r \setminus s \cong \mathbb{R}^2 \setminus s$ dunque lo spazio ha 2 componenti connesse. □

Esercizio 66. *Siano* $I_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a, y > b\}$. *Dimostrare che:*

1. $B = \{I_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ *è una base per la topologia* τ *meno fine di quella euclidea su* $\mathbb{R}^2$.
2. *Dire se* $(\mathbb{R}^2, \tau)$ *è connesso, compatto, di Hausdorff.*
3. *Dimostrare che le traslazioni sono omeomorfismi.*
4. *Determinare la chiusura* $\overline{\{(x, y)\}}$ *dei singoletti di* $(\mathbb{R}^2, \tau)$.

Soluzione. 1. Si vede che $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_{n,n}$ e che $I_{a,b} \cap I_{c,d} = I_{m,n}$ con $m = \max(a,c) n = \max(b,d)$. Inoltre ogni $I_{a,b}$ è aperto nella topologia euclidea perché unione $\cup_n (a,n) \times (b,n)$.

2. Lo spazio è connesso perché due aperti non sono mai disgiunti. Non è compatto poiché il ricoprimento $I_{n,n}$ non ammette sottoricoprimento finito. Non può essere di Hausdorff per lo stesso motivo che verifica la connessione.

3. L'applicazione $f_\alpha\colon (\mathbb{R}^2, \tau) \to (\mathbb{R}^2, \tau)$ definita da $x \mapsto x+\alpha$ è ovviamente bigettiva e continua. Inoltre è aperta perché $f(I_{a,b}) = I_{a+\alpha,b+\alpha}$ e perciò è un omeomorfismo.

4. La chiusura del singoletto è l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono, quindi posso prendere l'unione di tutti gli aperti che non lo contengono, farne l'unione e passare al complementare:

$$\bigcup I_{x,-} \cup \bigcup I_{-,y} \overset{\complement}{\rightsquigarrow} (-\infty, x) \times (-\infty, y)$$

Quindi $\overline{\{(x,y)\}}$ è il rettangolo *in basso a sinistra* di $\mathbb{R}^2$. Osserviamo quindi che lo spazio così costruito non è nemmeno T_1.

□

Esercizio 67. *Sia X uno spazio topologico e $Y = \{a,b\}$ dotato della topologia discreta. Allora X è connesso se e solo se ci sono esattamente due funzioni continue da X in Y.*

Soluzione. Se $f\colon X \to Y$ è una funzione continua, $f^{-1}(a)$ ed $f^{-1}(b)$ sono aperti e la loro unione è tutto X. X è connesso se e solo se uno dei due è vuoto, cioè se e solo se $f(X) = \{a\}$ oppure $f(X) = \{b\}$, e queste sono le uniche funzioni continue che esistono da X in Y. □

Esercizio 68. $S^3 \setminus S^1$ *è connesso.*

Soluzione. Dimostriamo che è connesso per archi. $X := S^3 \setminus S^1 \subseteq \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2 \sim_{omeo} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che è connesso per archi. Ora, per ogni coppia di punti $P, Q \in X$, esiste un arco $\gamma\colon [0,1] \to X$ tale che $\gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$ e $\gamma(t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^2\ \forall t \in [0,1]$. Ne segue che $\gamma(t) \neq 0\ \forall t \in [0,1]$ e $\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$ è un arco tutto contenuto in X che ha P e Q come estremi. □

Esercizio 69. *Siano X, Y spazi localmente compatti d Hausdorff e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Diremo che f è* semipropria *se $\forall K \subseteq Y$ compatto $\exists L \subseteq X$ compatto tale che $f(L) = f(X) \cap K$. Dimostrare o confutare le seguenti implicazioni:*

- *f propria $\Rightarrow$ f semipropria;*

- *f semipropria $\Rightarrow f$ chiusa;*
- *f semipropria $\Rightarrow f(X)$ chiuso in Y;*
- *se $F \subseteq X$ è un chiuso, ed f è semipropria $\Rightarrow f\big|F \colon F \to Y$ semipropria.*

Dimostrazione.

- Sì. Infatti, se K è un compatto in Y, $L = f^{-1}(K)$ soddisfa le ipotesi affinché f sia semipropria.
- No. Consideriamo l'applicazione

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow D^2$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & \text{se} x \notin D^2 \\ x & \text{se} x \in D^2 \end{cases}$$

  che si verifica facilmente essere semipropria (non propria, infatti $f^{-1}(D^2) = \mathbb{R}^2$, il che ci dice anche che l'implicazione del punto precedente non può essere invertita) e non è chiusa perché, presa una qualunque iperbole $\mathcal{I}$ che non tocchi il disco, si ha che $\mathcal{I}$ è un chiuso, ma la sua immagine $f(\mathcal{I})$ è un segmento aperto sul bordo del disco.
- Sì. Supponiamo per assurdo che $f(X)$ non sia chiuso, allora il suo complementare $Y \setminus f(X)$ non è aperto, e preso $y \in Y \setminus f(X)$ si ha che ogni intorno U di y (che possiamo supporre compatto) è tale che $U \cap f(X) \neq \varnothing$. Ma allora $V := U \cap f(X)$ è un compatto e riesco a separarlo con un aperto da y. Infatti, $\forall z \in V$, prendo un intorno aperto V_z e questi sono un ricoprimento aperto di V, da cui posso estrarre un sottoricoprimento finito. Allora per ogni V_z del sottoricoprimento trovo un intorno $U_z \ni y$ tale che $U_z \cap V_z = \varnothing$ e l'intersezione $\cap U_z$ è un'intorno di y disgiunto da $f(X)$, il che dà l'assurdo.
- No. Infatti la stessa applicazione definita qualche riga sopra ristretta all'iperbole $\mathcal{I}$ non resta semipropria (per esempio perché non è chiusa). $\square$

Esercizio 70. *Dati i due sottospazi*

$$X_1 = \{x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 0\} \quad X_2 = \{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$$

in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dimostrare se esiste un omeomorfismo $\psi \colon X_1 \to X_2$, e se esiste un omeomorfismo $\phi \colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che manda X_1 in X_2.

Soluzione. Il primo omeomorfismo ψ esiste, infatti X_1 è una retta del proiettivo, e X_2 una circonferenza, dunque $X_1 \sim \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \sim S^1 \sim X_2$. Invece il secondo omeomorfismo ϕ non può esistere: basta notare che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus X_1 \sim \mathbb{R}^2$ ed è quindi connesso, mentre $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus X_2$ è sconnesso, si scrive come unione disgiunti dei due sottospazi $\{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 =>\}$ e $\{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 < 0\}$. $\square$

Esercizio 71. *Dimostrare se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se ha la propprietà che ogni funzione continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ è limitata.*

Soluzione. Se X è un compatto, dunque la sua immagine continua $f(X)$ è compatta in $\mathbb{R}$ ed in particolare è limitata. Viceversa supponiamo che X non sia chiuso in $\mathbb{R}^n$, allora esisterebbe $x \in \overline{X} \setminus X$ e per ogni $y \in X, d(x, y) > 0$, perciò la funzione

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{d(y,x)} \end{aligned}$$

è continua. Sappiamo che esiste una successione $x_n \to x$, ma allora la successione $f(x_n) \to +\infty$, il che è un assurdo. Dunque X è chiuso. Supponiamo ora che X non sia limitato e consideriamo la funzione continua

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

, questa non è limitata e abbiamo trovato un assurdo. Allora X è anche limitato in $\mathbb{R}^n$ e perciò compatto. □

Esercizio 72. *Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi. Sia $\Omega \subseteq X$ un aperto connesso. Allora Ω è connesso per archi.*

Soluzione. Consideriamo per ogni punto $p \in \Omega$ il sottoinsieme $\Omega \supseteq \Omega_p := \{x \in \Omega \mid \exists\, \alpha \text{ arco tra } x \text{ e } p\}$. Allora Ω_p è chiaramente connesso per archi, in quanto componente connessa per archi del punto p. Dimostriamo che è un aperto in Ω: sia $y \in \Omega_p$, sappiamo che esiste un intorno di y connesso per archi e dunque tutto contenuto in Ω_p, che perciò è aperto. Dimostriamo che è che chiuso. Prendiamo il complementare di Ω_p in Ω. Questo è unione di punti non connettibili con archi a p ed è un aperto. Infatti preso un qualunque suo punto q, esiste un intorno U_q del punto disgiunto da Ω_p, altrimenti se ci fosse un punto z nell'intersezione, sarebbe connesso a p tramite un arco. Ma essendo X localmente connesso per archi, avrei un arco tra q e z. La composizione degli archi fornirebbe un arco tra p e q ma ciò provoca un assurdo. □

Esercizio 73. *Se X e Y sono spazi topologici e Y è compatto, allora la proiezione $p\colon X \times Y \to X$ è chiusa.*

Dimostrazione. Sia C un chiuso in $X \times Y$ e sia $x \in X \setminus p(C)$. Allora i punti (x, y) al variare di $y \in Y$ non appartengono a C. Ognuno di questi ha un intorno $U_x \times V_y$ che non interseca C. I V_y formano un ricoprimento aperto di Y, quindi ne posso estrarre un numero finito e i corrispondenti intorni U_x mi danno per intersezione un intorno aperto di x disgiunto da $p(C)$. Se infatti $a \in U \cap p(C)$, allora $\exists b$ tale che $(a, b) \in C$ ma poiché b appartiene a qualche aperto del sottoricoprimento, $(a, b) \in U_x \times V_y \subseteq X \times Y \setminus C$ per qualche intorno fuori da C, il che è assurdo. $\square$

4.3 Esercizi su spazi metrici

Esercizio 74. *Sia d una metrica su un insieme finito X. Allora d è topologicamente equivalente alla metrica discreta.*

Soluzione. Sia $X := \{x_1, ..., x_n\}$ e sia $r_{ij} := d(x_i, x_j)$. Si prenda $\varepsilon < min\{r_{ij} \text{ per } i, j \in \{1, ..., n\} \text{ e } i \neq j\}$. Risulta che $\forall i = 1, ..., n B_\varepsilon(x_i) = \{x_i\}$ e dunque ogni punto d X è aperto. Dunque ogni sottoinsieme di X è unione di aperto e quindi aperto e d è topologicamente eqivalente alla metrica discreta su X. □

Esercizio 75. *Sia d una distanza su di un insieme finito X. Provare che la topologia indotta da d è quella discreta.*

Soluzione. Se X contiene un solo punto non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che ci siano almeno due punti in X. Per ogni $x \in X$ poniamo $r = \min\{d(x, y) \mid y \in X, y \neq x\}$. Allora la palla aperta $B(x, r) = \{x\}$ e cioè la topologia su X è quella discreta. □

Osservazione Nell'esercizio precedente la palla chiusa non coincide con la chiusura della palla! Infatti il singoletto $\{x\}$ è (aperto e) chiuso in X. Pertanto $\{x\} = \overline{B(x, r)} \neq \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$.

Esercizio 76. *Siano (X, d) uno spazio metrico ed ε un numero reale positivo. Chiameremo ε-cammino in (X, d) una succesione finita $x_0, \dots, x_n \in X$ tal che $d(x_{i-1}, x_i) < 2\varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, n$; in tal caso diremo che gli estremi x_0 e x_n sono ε-collegati. Dimostrare che:*

1. *Se X è connesso, allora ogni coppia di punti di X è ε-collegata per un qualunque $\varepsilon > 0$.*

2. *Se X è compatto e se $\forall \varepsilon > 0$ ogni coppia di punti di X è ε-collegata, allora X è connesso.*

3. *Dare un controesempio al punto 2 nel caso manchi l'ipotesi di compattezza.*

Soluzione.

1. Fissato un ε consideriamo l'insieme $C_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid x \text{ e } y\varepsilon\text{-collegati}\}$. Si vede facilmente che $C_{varepsilon}(x)$ è aperto e chiuso e dunque coincide con X. Infatti per ogni $z \in C_\varepsilon(x)$ posso considerare la palla $B(y, \varepsilon)$ i cui punti sono tutti ε-collegati a x; inoltre per ogni z del complementare, esiste una palla aperta $B(z, \varepsilon)$ che non incontra $C_\varepsilon(x)$ e quindi il complementare è chiuso. Da questo segue che $C(x) = \{y \in X \mid x, y \ \varepsilon\text{-collegati} \ \forall \varepsilon > 0\} = \cap \mathbb{C}_\varepsilon(x) = X$.

2. Supponiamo $X = A \cup B$ con $A \cap B = \varnothing$. La funzione $d \colon A \times B \to \mathbb{R}$ è continua e quindi ha minimo $m = \min\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Fissato ε tale che $2\varepsilon < m$, presi comunque $x \in A, y \in B$ esiste un ε-cammino

tra loro. Considero il minimo indice k per cui $x_k \in A$ e $x_{k+1} \in B$. Allora $d(x_k, x_{k+1}) < 2\varepsilon < m$ il che è assurdo. Dunque non potrebbe esistere un ε-cammino tra un punto in A e un punto in B. Allora $A = \varnothing$ oppure $B = \varnothing$ e X è connesso.

3. Consideriamo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ogni coppia di punti è ε-collegata perché esiste un cammino tra i due che posso dividere in parti più piccole di ε e posso scegliere sempre una successione che non tocchi lo 0. Tuttavia $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è connesso.

$\square$

Esercizio 77. *La completezza di uno spazio metrico non è invariante per omeomorfismo.*

Dimostrazione. È noto che $\mathbb{R} \sim_{omeo} (0,1)$ e che $\mathbb{R}$ è completo. Tuttavia la successione $\{\frac{1}{n}\}_{n>1}$ è di Cauchy e non converge in $(0,1)$. $\square$

Esercizio 78. *Ogni spazio metrico completo è separabile?*

Soluzione. No. Basta considerare $\mathbb{R}$ con la metrica discreta: è uno spazio metrico completo ma non è a base numerabile, quindi non può essere separabile.

$\square$

Esercizio 79. *Siano Y e Z due sottospazi completi di uno spazio metrico X. Dimostrare che $Y \cup Z$ è un sottospazio completo di X.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione di Cauchy $\{x_n\}$ in $Y \cup Z$. Se $x_n \in Y\ \forall n$ oppure $x_n \in Z\ \forall n$, allora converge per ipotesi. Se invece la successione "saltella" tra Y e Z, essendo di Cauchy, definitivamente sará contenuta in una palla di raggio ε. Possiamo sempre supporre tale palla B_ε tutta contenuta in Y o in Z (o eventualmente in $Y \cap Z$). Ma allora la successione x_n ha limite. $\square$

Esercizio 80. *Sia (X, d) uno spazio metrico numerabile con almeno due punti. Si dimostri che:*

1. *Se X è completo, allora non è connesso.*

2. *X non è connesso in ogni caso.*

Soluzione. 1. Uno spazio metrico completo è di Baire, ed è di Hausdorff. Allora se X fosse connesso, $\forall x \in X$, $\{x\}$ sarebbe un chiuso non aperto con parte interna vuota e $X = \cup_x \{x\}$ sarebbe unione numerabile di chiusi con parte interna vuota ed avrebbe esso stesso parte interna vuota, assurdo.

2. Siano $a, b \in X$ due punti distinti e sia $r_0 = d(a, b)$. Consideriamo la famiglia $\{B_r\}$ con $r \in (0, r_0)$ dove $B_r = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$. Se non esistesse $\rho \in (0, r_0)$ tale che $B_\rho = \varnothing$, allora ci sarebbe un'applicazione iniettiva di $(0, r_0)$ in X, il che è assurdo, essendo X numerabile. Allora si considerino $A = \{x \in X \mid d(a, x) < \rho\}$ e $B = \{x \in X \mid d(a, x) > \rho\}$. Chiaramente si ha $A \cap B = \varnothing, A \cup B = X$ e i due insiemi A e B sono aperti. Dunque X non può essere connesso.

□

Esercizio 81. *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, e sia $x_0 \in X$. Si dimostri che x_0 è un punto isolato se e solo se $X \setminus \{x_0\}$ èun compatto. Mostrare poi che l'insieme $\{d(x_0, x) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}$ ha massimo M e si dica se l'insieme dei punti di distanza M da x_0 è un compatto in X.*

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di X. Estraiamone un sottoricoprimento finito $\{U_{i_k}\}$ di $X \setminus \{x_0\}$, allora l'aperto $U = X \setminus \cup U_{i_k}$ contiene x_0 e $U \cap X = \{x_0\}$, dunque il punto è isolato. Viceversa, preso un ricoprimento $\{U_i\}$ di $X \setminus \{x_0\}$, abbiamo che $\bigcup U_i \cup \{x_0\}$ è un ricoprimento aperto di X da cui posso estrarre un sottoricoprimento finito $U_1, \ldots, U_n, \{x_0\}$. Allora $\{U_i\}_{i=1,\ldots,n}$ è il sottoricoprimento finito di $X \setminus \{x_0\}$.
La funzione

$$d(x_0, -) \colon X \to \mathbb{R}$$

è continua e la sua immagine è un compatto, perciò per il teorema di Weierstrass ha un massimo M. L'insieme $\{x \in X \mid d(x, x_0) = M\}$ è chiuso in X perché controimmagine $f^{-1}(M)$ di un chiuso, dunque essendo un chiuso in un compatto è compatto. □

4.4 Esercizi su quozienti topologici

Osservazione Se X è T_2 non è detto che il quoziente sia T_2: $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'azione di G su $\mathbb{R}$ data da

$$\begin{aligned} G \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (g, r) &\mapsto gr \end{aligned}$$

e il quoziente $\mathbb{R}/G$ è costituito da soli due punti: la classe di 0 e la classe di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, non è T_2. Il secondo punto non è chiuso.

Osservazione La proiezione $X \to X/G$ è sempre aperta. Se G è finito, è anche chiusa.

Teorema 4.2. *Se $\forall x, y \in X$ $\exists U \ni x$ $\exists V \ni y$ tali che $\{g \in G \mid gU \cap V \neq \varnothing\}$ è finito, allora X/G è T_2.*

Dimostrazione. Siano P, Q due punti in X/G, e x, y rappresentanti in X cioè tali che $\pi(x) = P$ $\pi(y) = Q$. Siano U e V come nell'ipotesi, e $g_1, \ldots, g_k \in G$ tali che $gU \cap V \neq \varnothing$. Chiamiamo U_i e V_i intorni disgiunti di x e $g_i y$ e siano $\Omega_1 = U \cap \big(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\big)$ e $\Omega_2 = V \cap \big(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\big)$. Si verifica che $\bigcup_{g \in G} g(\Omega_1)$ e $\bigcup_{g \in G} g(\Omega_2)$ sono due aperti saturi disgiunti che sono intorni rispettivamente di x e y e che al quoziente danno intorni disgiunti di P e Q. $\square$

Osservazione Il teorema precedente si può riformulare in questi termini:

Teorema 4.3. *Sia X uno spazio T_2 e G un gruppo degli omeomorfismi di X. Se*

1. *$\exists A$ aperto che incontra tutte le orbite;*
2. *$\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \varnothing\}$ è finito,*

allora X/G è separato.

Dimostrazione. Fissati $p, q \in X/G$, ci sono $x, y \in A : \pi(x) = p, \pi(y) = q$. Siano $g_1, \ldots, g_k \in G$ tali che $gA \cap A \neq \varnothing$. Scegliamo $\forall i = 1, \ldots, s$ intorni aperti e disgiunti $U_i \ni x$ e $V_i \ni g_i y$. Ora $U \colon = A \cap \big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\big) \ni x$ e $V \colon = A \cap \big(\bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1} V_i\big) \ni y$. Si verifica che $U \cap gV = \varnothing$ $\forall g \in G$. Infatti, ciò è chiaro per $g \neq g_i$, e se $g = g_i$, $U \subset U_i$ $V \subset g_i^{-1} V_i$ e $U \cap g_i V \subset U_i \cap V_i = \varnothing$. Saturiamo U e V. $\bigcup_{g \in G} gU \cap \bigcup_{h \in G} hV = \bigcup_{g \in G} \big(gU \cap hV\big) = \varnothing$. Supponiamo $gU \cap hV \neq \varnothing$, allora $U \cap g^{-1} hV \neq \varnothing$, il che è assurdo. Allora abbiamo due aperti disgiunti e saturi che contengono le orbite di x e y: questo prova che il quoziente X/G è di Hausdorff. $\square$

Esercizio 82. *Si consideri il quoziente topologico* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*. Detta* $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *la proiezione al quoziente, denotiamo con* $\omega := \pi(\mathbb{Z})$*. Si dimostri che* ω *non ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile.*

Soluzione. Supponiamo per assurdo che ω abbia un sistema fondamentale di intorni numerabile $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Senza perdere di generalità possiamo supporre U_n aperto $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\pi^{-1}(U_n)$ è aperto e contiene $\mathbb{Z}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Possiamo quindi trovare $0 < d_n < \frac{1}{2}$ tale che $[n-d_n, n+d_n] \subset \pi^{-1}(U_n) \forall n \in \mathbb{N}$. Consideriamo

$$A := (-\infty, \frac{1}{2}) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n - d_n, n + d_n)$$

A è saturo e $\pi(A)$ è aperto e intorno di ω. Quindi dovrebbe esistere $n \in \mathbb{N}$ tale che $U_n \subseteq \pi(A)$. Ma ciò è assurdo perchè allora si dovrebbe avere $[n - d_n, n + d_n] \subset \pi^{-1}(U_n) \subseteq \pi^{-1}(\pi(A)) = A$. $\square$

Esercizio 83. *Si consideri sull'intervallo* $X = [0, 3] \subset \mathbb{R}$ *la seguente relazione di equivalenza:*

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure } x, y \in [1, 2]$$

e sia $Y = X/\sim$ *lo spazio quoziente.*

- *Dire se* Y *è compatto, connesso, di Hausdorff;*
- *dire se* X *e* Y *sono omeomorfi.*

Soluzione. Sia $\pi : X \to Y$ la proiezione al quoziente. Osserviamo che $X \subset \mathbb{R}$ è compatto poiché chiuso e limitato e connesso, perché omeomorfo all'intervallo $[0, 1]$ tramite la funzione $x \mapsto \frac{x}{3}$. Allora Y è immagine di un compatto e connesso tramite una funzione continua, perciò è compatto e connesso. In generale, anche se X è T_2 non possiamo affermare a priori che Y lo sia. In questo caso, verifichiamo che dati due punti $\overline{x} := \pi(x), \overline{y} := \pi(y) \in Y$, esistono un intorno $U_{\overline{x}}$ di $\overline{x}$ e un intorno $U_{\overline{y}}$ di $\overline{y}$ che sono disgiunti. Abbiamo tre casi:

1. $x, y \in [0, 1) \cup (2, 3]$;
2. $x, y \in [1, 2]$;
3. $x \in [0, 1) \cup (2, 3] \wedge y \in [1, 2]$.

Nel primo caso, essendo X di Hausdorff, trovo i due intorni disgiunti $U_x \subset X$ e $U_y \subset X$ e quando proietto al quoziente ottengo $\overline{x} = x, \overline{y} = y$, così posso prendere $U_{\overline{x}} = U_x \cap \complement[1, 2]$ e $U_{\overline{y}} = U_y \cap \complement[1, 2]$. Nel secondo caso, $\overline{x} = \overline{y}$ e quindi sono lo stesso punto.

Infine, se $y \in [1, 2] \Rightarrow \overline{y} = \overline{1}$, e costruisco un intorno $U_{\overline{1}}$ disgiunto da $U_{\overline{x}}$. Poiché X è $T_2, \exists U' \; \exists U_1$ tali che $U' \cap U_1 = \emptyset$ e $\exists U'' \; \exists U_2$ tali che $U'' \cap U_2 = \emptyset$. Allora scelgo $U_{\overline{x}} = \pi(U' \cap U'') \cong U' \cap U''$ e $U_{\overline{y}} = \pi(U_1 \cup U_2 \cup (1, 2))$. Si verifica che $U_{\overline{x}} \cap U_{\overline{y}} = \emptyset$, e questo dà la tesi per il primo punto. La risposta al secondo punto è anch'essa affermativa: X e Y sono omeomorfi tramite $\varphi : X \to Y$ definita come

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x \in [1,2] \\ x-1 & \text{se } x \in (2,3] \end{cases}$$

. $\square$

Esercizio 84. *Consideriamo su $\mathbb{R}$ la seguente relazione di equivalenza:*

$$x \sim y \Leftrightarrow \{x = y \vee x, y \in (0,1)\}$$

Allora $\mathbb{R}/\sim$ non è omeomorfo ad $\mathbb{R}$.

Soluzione. Consideriamo l'immagine dell'intervallo aperto $(0,1)$: nel quoziente sarà un punto, sia ω. Essendo immagine di un aperto, tramite la proiezione π, ω sarà aperto in $\mathbb{R}/\sim$. Ciò significa che il quoziente ha un punto aperto. Sappiamo però che $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea è uno spazio T_2, e in particolare i suoi punti sono chiusi. Inoltre $\mathbb{R}$ è connesso, perciò i suoi punti non possono essere chiusi **e** aperti. Allora ω rende impossibile un omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e il quoziente $\mathbb{R}/\sim$. $\square$

Esercizio 85. *Si consideri la relazione di equivalenza su $\mathbb{C}$ data da:*

$$z_1 \sim z_2 \iff z_1 = z_2 \text{ oppure } f(z_1) = f(z_2)$$

dove $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è la funzione che associa $z \mapsto z - |z|$. Si dica se il quoziente $\mathbb{C}/\sim$ è connesso, compatto, separato, N1.

Soluzione. f è una funzione continua e l'immagine continua di un connesso è connessa. Si verifica familmente *** che $\mathbb{C}/\sim$ è T_2. Per la compattezza, prendiamo un aperto saturo che contiene $\mathrm{Ker} f = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\} = \mathbb{R}^+$. Sia questo aperto U. $\mathbb{C} \setminus U$ non è compatto e si può ricoprire con un ricoprimento saturo e non raffinabile. Dunque il quoziente non è compatto. La proprietà N1 non è verificata: se prendo un sistema fondamentale di intorni numerabile di $\mathbb{R}^+$, posso costruire un aperto che non contiene nessuno degli intorni fondamentali in questo modo: prendo l'unione degli intorni numerabili e tolgo da ciascuno un punto distinto. $\square$

Esercizio 86. *Sia $A = \{a, b\} \subset \mathbb{R}^2, a \neq b$ e consideriamo la relazione di equivalenza $x \sim y \iff x = y$ oppure$x, y \in A$. Sia $X = \mathbb{R}^2/A$. Trovare due funzioni $f_1, f_2\colon S^1 \hookrightarrow X$ continue in modo che $X \setminus f_1(S^1)$ sia sconnesso e $X \setminus f_2(S^1)$ sia connesso.*

Dimostrazione. Osserviamo che una circonferenza sconnette $\mathbb{R}^2$. Se tale circonferenza non tocca a e b, quindi se i punti di A sono esterni alla circonferenza, le componenti connesse rimangono disgiunte quando proiettate al quoziente. Se invece prendiamo una circonferenza in modo che a o b si trovino al suo interno, la relazione di equivalenza $\sim$ identificando i due punti, unisce le componenti sconnesse nel quoziente. Un altro modo è considerare il segmento che unisce a e b in $\mathbb{R}^2$: questo è omeomorfo ad S^1, e così la sua immagine, tuttavia quest'ultima non sconnette X poiché un segmento non sconnette R^2. $\square$

Esercizio 87. *Sia $G \subseteq Omeo(X)$. Poniamo $x \sim y \iff \exists g \in G\ x = gy$ e consideriamo X/G con la topologia quoziente. Si provi che*

- *$\pi\colon X \to X/G$ è aperta;*
- *Se G è un gruppo finito, π è anche chiusa.*

Soluzione. Poiché G è un gruppo, la relazione $\sim$ è di equivalenza. Sia U un aperto in X. Allora gU è anch'esso un aperto di X poiché g è un omeomorfismo. Segue che $\bigcup_{g \in G} gU = \pi^{-1}(\pi(U))$ è un aperto saturo e quindi $\pi(U)$ è un aperto. Se G è finito, prendiamo un chiuso C in X. Allora $\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} gC$ è un chiuso saturo e $\pi(C)$ è un chiuso. $\square$

Esercizio 88. *Su $I = [0, 1]$ con la topologia euclidea indotta da $\mathbb{R}$ si consideri la relazione di equivalenza $x \sim y \iff x, y \in \{0, 1\}$. Sia $\pi\colon I \to I/\{0, 1\}$ la proiezione canonica. Mostrare che:*

- *π è chiusa e non aperta;*
- *$f\colon I \to S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ data da $f(t) = e^{2\pi i t}$ induce un'applicazione $\overline{f}\colon I/\{0, 1\} \to S^1$ tale che $\overline{f} \circ \pi = f$;*
- *$I/\{0, 1\}$ è omoemorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ che è il quoziente di $\mathbb{R}$ per la relazione di equivalenza che identifica due numeri reali la cui differenza è un numero intero.*

Soluzione. $U = [0, \frac{1}{2})$ è aperto in I, ma $\pi^{-1}(\pi(U))) = [0, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$ non è aperto, dunque $\pi(U)$ non è aperto nel quoziente. Invece preso un chiuso $C \subseteq I$, il suo saturato è C se $0, 1 \notin C$ e $C \cup \{0, 1\}$ altrimenti; in entrambi i casi si tratta di chiusi. f è una funzione continua e $f(0) = f(1) = 1$, perciò induce una funzione continua $\overline{f}\colon I/\{0, 1\} \to S^1$ tale che $\overline{f} \circ \pi = f$. Tale funzione è ovviamente suriettiva ed inoltre è iniettiva perché l'unico caso in cui $f(x) = f(y)$ è per $x, y \in \{0, 1\}$ e tali punti sono identificati nel quoziente. L'applicazione $q\colon\ : I \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ data dalla composizione dell'iniezione di I in $\mathbb{R}$ e della proiezione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è continua e chiusa, dunque esiste un'applicazione $\overline{q}\colon I/\{0,1\} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ indotta da q che è iniettiva, continua e chiusa. Inoltre se $p(x) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $y = x + n \in I$ e $p(x) = p(y) = q(y) = \overline{q} \circ \pi(y)$, e questo dà la surgettività, dunque $\overline{q}$ è un omeomorfismo. □

Esercizio 89. *Provare che per ogni $n > 0$, il quoziente $\mathbb{R}^n/GL(n,\mathbb{R})$ non è di Hausdorff.*

Soluzione. L'azione del gruppo $GL(n,\mathbb{R})$ su $\mathbb{R}^n$ ha solo due orbite: $a = \pi(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ e $b = \pi(\{0\})$, quindi i soli aperti saturi di $\mathbb{R}^n$ sono $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \varnothing$, il che implica che gli aperti nel quoziente sono solamente $\{a,b\}, \{a\}, \varnothing$. Dunque il quoziente non può essere di Hausdorff. □

Esercizio 90. *Lo spazio quoziente $X = \mathbb{R}^n/O(n)$ è omeomorfo alla semiretta $Y = [0, +\infty)$.*

Soluzione. Le orbite dell'azione di $O(n)$ su $\mathbb{R}^n$ sono $\{0\}$ e le palle $B(r,0)$ centrate in 0. Dunque esiste una classe di equivalenza per ogni $r \geq 0$ e l'applicazione $f\colon X \to Y$ tale che $f\bigl(\{0\}\bigr) = 0$ e $f\bigl(B(r,0)\bigr) = r$ è continua (infatti se $A \subset Y$ è un aperto, $f^{-1}(A) = B(s,0)$ dove $s = \sup(A)$), iniettiva e surgettiva. Inoltre è chiusa poiché gli unici chiusi di X sono $\{0\}$ e X e $f\bigl(\{0\}\bigr) = 0, f(X) = Y$. Dunque f è un omeomorfismo. □

Esercizio 91. *Si considerino $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ e il gruppo $G = SO(2)$ delle rotazioni di $\mathbb{R}^2$ intorno all'origine. Si provi che $S^2/G \sim_{omeo} [-1,1]$.*

Soluzione. L'azione di G su S^2 è data dalla rotazione intorno a un asse, che per comodità supponiamo essere l'asse z: $g(x,y,z) = (g(x,y),z)$. Allora le orbite dell'azione sono i *paralleli* della sfera e i due *poli*. L'applicazione $\pi_z\colon S^2 \to [-1,1]$ è continua ed è costante sulle orbite, dunque induce una $f_z\colon S^2/G \to [-1,1]$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "\pi_z"] \arrow[d, "\pi"] & {[-1,1]} \\ S^2/G \arrow[ur, "f_z"] & \end{tikzcd}$$

Inoltre tale funzione f_z è ovviamente bigettiva e continua (perché π_z è continua). Essendo S^2/G compatto e $[-1,1]$ di Hausdorff, f_z è chiusa e dunque un omeomorfismo. □

Esercizio 92. *è vero che un quoziente di uno spazio topologico separabile è separabile?*

Soluzione. è vero: infatti l'immagine continua di uno spazio separabile è separabile. □

Esercizio 93. *Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ data da: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Mostrare che la topologia quoziente su $\mathbb{R}/\sim$ coincide con la topologia banale.*

Soluzione. Sia U un aperto del quoziente. Questo sarà del tipo $U = \{x + \mathbb{Q} \mid x \in I \subseteq \mathbb{R}\}$. Allora, detta π la proiezione al quoziente, $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in I}(x + \mathbb{Q})$ ed è un aperto in $\mathbb{R}$. Se $U \neq \mathbb{R}/\sim$ allora esiste $y + \mathbb{Q} \in \mathbb{R}/\sim \setminus U$ contenuto in $\mathbb{R} \setminus \pi^{-1}(U)$, chiuso in $\mathbb{R}$. Dunque ho trovato un chiuso denso in $\mathbb{R}$ e ciò significa che $\pi^{-1}(U) = \varnothing \Rightarrow U = \varnothing$. Questo implica che la topologia su $\mathbb{R}/\sim$ è quella banale. □

Esercizio 94. *Su S^1 poniamo la relazione di equivalenza $\sim$ che identifica punti antipodali, ossia $x \sim y \iff x = \pm y$. Provare che $S^1/\sim$ è omeomorfo a S^1.*

Soluzione. Sappiamo che vale $S^1/\sim \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$. □

Esercizio 95. *Sia $r \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una retta. Definiamo la seguente relazione di equivalenza:*

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } x, y \in r$$

e chiamiamo $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/\sim$. Si dica se X è connesso, compatto o di Hausdorff. Inoltre dire se è vero che esiste un punto x_0 tale che $X \setminus \{x_0\} \sim_{omeo} \mathbb{R}^2$ e dimostrare che $X \sim_{omeo} S^2$.

Dimostrazione. X è chiaramente connesso e compatto perché immagine continua di uno spazio connesso è compatto. Per il resto della tesi, basta osservare che X altro non è che la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$. Possiamo infatti supporre, a meno di omeomorfismi, che r sia la *retta all'infinito* di $\mathbb{R}^2$, e allora, se $\pi\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to X$ è la proiezione al quoziente, basta prendere $x_0 = \pi(r)$ e così si ha $X \setminus \{x_0\} = \pi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \setminus \pi(r) = \pi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r) = \pi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. Inoltre sappiamo che la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^n$ è omemorfa a S^n per ogni n. □

4.5 Esercizi sull'omotopia

Esercizio 96. *La proiezione sghemba* $\pi_H \colon \mathbb{P}^n \setminus H \to K$ *con* $H \cap K = \varnothing$, *dim*K + *dim*$H = n-1$ *è una retrazione per deformazione e* K *è un retratto per deformazione di* $\mathbb{P}^n \setminus H$.

Soluzione. Poniamo $h = \dim H$ e $k = \dim K$, $h + k = n - 1$. Possiamo scegliere un riferimento proiettivo $P_0, \dots, P_n, U$ tale che $P_0, \dots, P_h \in H$ e $P_{h+1}, \dots, P_n \in K$. Allora $H = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_{h+1} = \cdots = x_n = 0\}$ e $K = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_0 = \cdots = x_h = 0\}$. Se $P \notin H$, almeno una coordinata di P tra $x_{h+1}, \dots, x_n$ è diversa da 0. Allora $\pi_H(P) = [0, \dots, 0, x_{h+1}, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \setminus H$ ed è ben determinato perché le coordinate non sono tutte nulle.

$$\begin{aligned} \Phi \colon [0,1] \times \mathbb{P}^n \setminus H &\longrightarrow \mathbb{P}^n \setminus H \\ \big(t, [x_0, \dots, x_n]\big) &\longmapsto [tx_0, \dots, tx_h, x_{h+1}, \dots, x_n] \end{aligned}$$

è tale che per $t = 0$ $\Phi = \pi_H$ e per $t = 1$ $\Phi = id$. Possiamo ricoprire $\mathbb{P}^n \setminus H = \displaystyle\bigcup_{i=h+1}^{n} U_i$ con $U_i = \pi_H\big(\{x_i = 1\}\big)$ con $\{x_i = 1\}$ iperpiani di $\mathbb{K}^n$. Su U_j $x_j \neq 0$ dunque possiamo riscrivere le coordinate $[x_0, \dots, x_n] = [\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_h}{x_j}, \frac{x_{h+1}}{x_j}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_j}]$. Chiamando $\Phi_t(P) \colon = \Phi(t, P)$ si ha che $\Phi_t(P) = [t\frac{x_0}{x_j}, \dots, t\frac{x_h}{x_j}, \frac{x_{h+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}]$ è continua: il punto P si muove sulla retta che lo unisce alla sua proiezione. Essendo Φ_t continua in U_j per ogni j, e coincidendo sulle intersezioni, è continua su $\mathbb{P}^n \setminus H$. $\square$

Esercizio 97. *Ogni retratto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.*

Soluzione 1. Sia $Y \subseteq X$ un retratto dello spazio topologico di Hausdorff X. Sia $r \colon X \to Y$ una retrazione. Se $Y = X$, la tesi è banalmente vera. Supponiamo quindi $Y \neq X$ e sia $x \in X \setminus Y$. Poiché X è di Hausdorff, x e $r(x)$ hanno intorni aperti disgiunti U e V. Essendo r continua, possiamo trovare un intorno aperto $U_0 \subset$ di x tale che $r(U_0) \subset V$. Ma questa inclusione implica in particolare che $r(y) \neq y$ se $y \in U_0$, cioè $U_0 \cap Y = \varnothing$. Quindi $X \setminus Y$ è intorno di ogni suo punto, perciò aperto e quindi Y è chiuso. $\square$

Soluzione 2. L'insieme dei punti fissi tramite un'applicazione continua è un chiuso in quanto luogo di zeri dell'applicazione $g(x) := f(x) - x$, dunque $\{x \in X \mid f(x) = x\} = g^{-1}(0)$. Basta osservare che la retrazione è continua. $\square$

Esercizio 98. *Dimostrare che uno spazio* Y *omotopicamente equivalente a uno spazio connesso* X *è anch'esso connesso.*

Soluzione. Supponiamo $Y = A \cup B$ unione di due aperti disgiunti. Siano $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to X$ tali che $fg \sim id_Y$ e $gf \sim id_X$. Allora o $g(A) \cap g(B) = \varnothing$ e quindi $X = gf(X) = g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$ il che è assurdo, oppure $\exists x \in g(A) \cap g(B)$. Allora $f(x) = fg(y)$ per qualche $y \in Y$ è in $A \cap B$, assurdo. $\square$

Esercizio 99. *Uno spazio topologico contrattile è connesso per archi.*

Dimostrazione. Sia $F\colon X \times I \to X$ un'omotopia tra l'identità su X e un'applicazione costante. Allora, per ogni coppia di punti $x, y \in X$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ F(y, 2-2t) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

definisce un cammino continuo che congiunge x a y. □

Esercizio 100. *Il bicchiere vuoto è un retratto per deformazione del bicchiere pieno.*

Soluzione. In termini tecnici dobbiamo mostrare che $Y = D^2 \times \{0\} \cup S^1 \times I$ è retratto per deformazione di $X = D^2 \times I$. Basta considerare $R\colon X \times I \to Y$ data da $(x, t) \mapsto tx + (1-t)y_x$ dove y_x è un punto dipendente da x, perché la funzione sia ben definita si può prendere come il punto di intersezione di Y con la retta che passa per x e un punto $P = (0, 0, h) \in \mathbb{R}^3$ fissato con $h > 1$. □

Esercizio 101. *Ogni applicazione continua non surgettiva $f\colon X \to S^2$, dove X è uno spazio topologico qualsiasi, è omotopa a costante.*

Soluzione. Sappiamo che $\exists y_0 \in S^2$ tale che $\nexists x \in X f(x) = y_0$. Allora poniamo $F\colon X \times I \to S^2$ $F(x,t) = \frac{(1-t)f(x)-ty_0}{\|(1-t)f(x)-ty_0\|}$ che è ben definita in quanto il denominatore è sempre diverso da 0 ed è continua. Essendo $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = -y_0$, F è l'omotopia cercata. □

Esercizio 102. *Gli spazi topologici $X = S^1$ e $Y = S^1 \cup [1, 2] \times 0$ sono omotopicamente equivalenti ma non omeomorfi.*

Soluzione. Per vedere che non sono omeomorfi, basta osservare che togliendo il punto $(1, 0)$, X risulta connesso, mentre Y no. Le applicazioni $i\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ definite dall'inclusione e da

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in S^1 \\ (1, 0) & \text{se } x \in [1, 2] \times 0 \end{cases}$$

sono equivalenze omotopiche. □

Esercizio 103. *$X = S^3 \setminus S^1$ ha lo stesso tipo di omotopia di S^1.*

Soluzione. $X = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = 1\} \setminus \{(z, 0) \mid z \in S^1\}$ si retrae per deformazione su $S^1 = \{(0, z) \mid z \in S^1\}$ tramite l'omotopia

$$H\colon X \times I \to S^1$$
$$((z_1, z_2), t) \mapsto (tz_1, \sqrt{1 - t\|z_1\|^2}\frac{z_2}{\|z_2\|})$$

□

Esercizio 104. *Sia $f\colon S^n \to X$ continua. Se esiste $g\colon D^{n+1} \to X$ che estende f, allora f è omotopa a costante.*

Soluzione. L'omotopia è data da

$$\begin{aligned} F\colon S^n \times I &\to D^{n+1} \\ (z,t) &\mapsto zt \end{aligned}$$

infatti $g \circ F(z,0) = g(0)$ e $g \circ F(z,1) = g(z) = f(z)$. □

Esercizio 105. *Sia $f\colon S^1 \to S^1$ continua tale che $\forall z\ f(z) = -f(-z)$. Allora f ha grado dispari.*

Soluzione. Posso considerare $f\colon I \to S^1$ e $f(\frac{1}{2}) = -f(0)$ implica che $f(t+\frac{1}{2}) = -f(t)$ e sollevarla a una applicazione continua $\overline{f}$ in modo che $\overline{f}(\frac{1}{2}) - \overline{f}(0) = n + \frac{1}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Ora definisco

$$g(t) = \begin{cases} \overline{f}(t) & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{f}(\frac{1}{2} + \overline{f}(t - \frac{1}{2} - \overline{f}(0) & \text{se } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Segue che il grado di f è $g(1) - g(0) = 2n = 1$. □

Esercizio 106. *Sia $n \neq 2, U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Dimostrare che non esiste un omeomorfismo $f\colon U \to V$.*

Soluzione. Se $n = 1$, preso un qualunque $x \in U$, c'è un disco aperto D tutto contenuto in U che contiene x, ma la restrizione di $f\colon D \setminus \{x\} \to f(D) \setminus \{f(x)\}$ non può essere un omeomorfismo perché il dominio è connesso mentre l'immagine no.
Nel caso $n \geq 3$, sia $y \in V$ e prendiamo $r \in \mathbb{R}$ tale che $B_r(y) \subseteq U$. Allora esiste un disco omeomorfo a D^3 tutto contento nella palla, che ha per bordo un S^2. L'omeomorfismo tra V e U induce l'applicazione $g\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua e iniettiva, ma questo è un assurdo perché contraddice il teorema di Borsuk. □

Esercizio 107. *Siano $f_1, f_2\colon X \to Y$ e $g_1, g_2\colon Y \to Z$. Se $f_1 \simeq f_2$ allora $g_1 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_2$; e se vale anche $g_1 \simeq g_2$, si ha che $g_1 f_1 \simeq g_2 f_2$.*

Soluzione. Se F è l'omotopia tra f_1 e f_2, $g \circ F$ è l'omotopia tra gf_1 e gf_2. Se G è omotopia $g_1 \simeq g_2$, $H(x,t) = G(F(x,t),t)$ è l'omotopia richiesta. □

Esercizio 108. *Si dimostrino le seguenti equivalenze omotopiche:*

- $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq S^n$
- $S^1 \simeq Y = \{x \in D^2 \mid \|x\| \geq u, u \in (0,1)\}$
- $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p,q\} \simeq S^n \vee S^n$

Soluzione. Basta poco:

- $g\colon \mathbb{R}^{n+1} \to S^n$ $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ è retrazione per deformazione; l'omotopia è $(x,t) \mapsto tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$.
- Come sopra, Y si retrae per deformazione sulla circonferenza, $(y = re^{i\theta}, t) \mapsto (t + (1-t)r)e^{i\theta}$.
- Per $x \neq 0$, pongo $\overline{x}$ l'intersezione di una sfera con la semiretta uscente dall'origine per x. Mappo $x \mapsto \overline{x}$ e ottengo l'omotopia $F(x,t) = (1-t)x + t\overline{x}$ e se il punto è all'interno della sfera lo mando sul bordo.

□

Esercizio 109. *Se X è uno spazio topologico connesso per archi e Y ha lo stesso tipo di omotopia di X, anche Y è connesso per archi.*

Soluzione. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$ tali che $fg \simeq id_Y$ e $gf \simeq id_X$. Per ogni coppia di punti $y_1, y_2 \in Y$ considero le loro immagini $g(y_1), g(y_2)$. Se $\alpha\colon I \to X$ è un cammino continuo tra $g(y_1)$ e $g(y_2)$, $f\alpha$ è cammino tra $fg(y_1)$ e $g(y_2)$ che è omotopo ad un cammino continuo β tra y_1 e y_2. □

Esercizio 110. *Sia $X = S^1 \vee S^1_2$ dove $S^1_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\}$. Si mostri che X è un retratto di S^1 e che $Y = X \setminus \{(-1,0),(3,0)\}$ è retratto per deformazione di $p = \{(1,0)\}$.*

Soluzione. Una retrazione banale è $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Altrimenti si può porre $r\colon x \mapsto x$ se $x \in S^1$ e $r\colon x \mapsto p$ se $x \in S^1_2$. Si vede facilmente che $ri = id_{S^1}$. La funzione definita da $F(z = e^{i\theta}, t) = e^{i\theta t}$ per $z \in S^1$ e $F(e^{i\theta}, t) = 2 + e^{i(t\theta + (1-t)\pi)}$ per $e^{i\theta} \in S^1_2$ fornisce la tesi. □

Esercizio 111. *$X \simeq \{p\}$ se e solo se $id_X \simeq c$, dove c denota un'applicazione costante.*

Soluzione. Se $f\colon X \to \{p\}$ e $g\colon \{p\} \to X$ sono le equivalenze omotopiche, $id_X \simeq gf = c$. Viceversa la proiezione $\pi\colon X \to \{p\}$ e l'inclusione canonica $i\colon \{p\} \to X$ sono tali che $\pi i = id_{\{p\}}$ e $i\pi \simeq id_X$. □

Esercizio 112. *Se $f, g\colon Y \to X$ sono applicazioni continue e X è contrattile, allora $f \simeq g$.*

Soluzione. Detta F l'omotopia di X con un punto, $F(f(y),t)\colon f \simeq cost$ e $F(g(y),t)\colon g \simeq cost \Rightarrow f \simeq g$ per transitività. □

Esercizio 113. *Si diano esempi di applicazioni $f\colon X \to Y$ iniettive (surgettive) tali che $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ non sia un omomorfismo iniettivo (surgettivo).*

Soluzione. Considerare rispettivamente l'inclusione $i\colon S^1 \to \mathbb{R}$ e la mappa $g\colon [-1,1] \to S^1$. $\square$

Esercizio 114. *Sia G un gruppo topologico. Si mostri che $\pi_1(G,e)$ è abeliano.*

Soluzione. Se $\alpha, \beta \in \pi_1(G,e)$ il diagramma:
******

suggerisce un modo per definire un'omotopia tra $\alpha\beta i(\alpha)i(\beta)$ e l'applicazione costante in e. Per esempio

$$\begin{aligned} F\colon I^2 &\longrightarrow G \\ (s,t) &\longmapsto \alpha(s)\beta(t) \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 115. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, e siano $x, y \in X$. Detti $\gamma_1, \gamma_2\colon I \to X$ cammini continui tra x e y, e detto $\gamma_\#\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ definito da $[\alpha] \mapsto [i(\gamma)\alpha\gamma]$, si dimostri che $\gamma_{1\#} = \gamma_{2\#} \iff [\gamma_2 i(\gamma_1)] \in Z(\pi_1(X,x))$.*

Soluzione. Basta scrivere: $\forall \alpha\ [i(\gamma_1)\alpha\gamma_1] = [i(\gamma_2)\alpha\gamma_2] \iff [\gamma_2 i(\gamma_1)\alpha] = [\alpha\gamma_2 i(\gamma_1)]$. In particolare l'omomorfismo $\gamma_\#$ non dipende dal cammino γ scelto se il gruppo $\pi_1(X,x)$ è abeliano. $\square$

Esercizio 116. *Sia $f\colon S^1 \to S^1$ un'applicazione continua. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

- *a L'applicazione f ammette sempre un punto fisso.*
- *b Se l'applicazione f è omotopicamente equivalente ad una funzione costante, allora ammette un punto fisso.*
- *c Se f ammette un punto fisso allora è omotopicamente equivalente ad una funzione costante.*

Dimostrazione. La prima è palesemente falsa, basta considerare una rotazione non banale. La seconda invece è vera. Se f è omotopa a costante, posso sollevarla ad una applicazione dal disco al suo bordo, e ottenere per composizione con l'inclusione una applicazione continua $D^2 \to D^2$ che ammette punto fisso per il teorema di Brower. Tale punto fisso è sul bordo S^1 e dunque è un punto fisso per f. Infine la (c) è falsa. Se l'identità fosse omotopa a costante, D^2 si retrarrebbe per deformazione sul suo bordo. $\square$

Esercizio 117. *Definiamo $F(X,2) = \{(x,y) \in X \times X \mid x \neq y\} = X \times X \setminus \Delta$. Si dimostri che se $X = S^1$, $F(X,2) \sim_{omeo} S^1 \times (S^1 \setminus \{(1,0)\})$ e si calcoli il relativo gruppo fondamentale.*

Soluzione. Chiamiamo $Y = F(S^1, 2)$ e $Z = S^1 \times (S^1 \setminus \{(1,0)\})$. La funzione

$$f \colon Y \to Z$$
$$(a, b) \mapsto (a, ba^{-1})$$

definisce un omeomorfismo infatti la sua inversa è data da $(a, b) \mapsto (a, ba)$ ed è continua. Dunque, essendo $(S^1 \setminus \{(1,0)\})$ contrattile, si ha $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}$ e un suo generatore è $t \mapsto (e^{it}, ie^{it})$. □

Esercizio 118. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ il disco chiuso centrato nell'origine e di raggio 4 e siano D_1, D_2 e D_3 i dischi aperti di raggio uno centrati rispettivamente in $(-2, 0), (0, 2), (2, 0)$ di raggio 1.*
Siano $Y = D \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$, Z il cilindro $S^1 \times [0, 4]$ e X lo spazio topologico ottenuto dall'unione di Y e Z identificando il bordo inferiore del cilindro con il bordo di D_1 e il bordo superiore con il bordo di D_3.
Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

Soluzione. Il disco a cui sono stati tolti i tre dischetti (Y) si retrae per deformazione su un wedge di 3 circonferenze, il cui gruppo fondamentale è $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Invece il gruppo fondamentale del cilindro "piegato" con le circonferenze del bordo attaccate a un punto, è omotopicamente equivalente a un toro senza un punto, che ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Infine l'intersezione dei sottospazi considerati è il wedge di due circonferenze che ha gruppo fondamentale $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Per il teorema di van Kampen, risulta quindi $\pi_1(X) = ((\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}))/(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. □

Esercizio 119. *Sia $A \subseteq X$ un retratto di uno spazio topologico X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

a) A è un retratto di deformazione di X.

b) Se X è contraibile, lo è anche A.

c) Se $B \subseteq X$ è un sottospazio con $A \cap B \neq \varnothing$, allora $A \cap B$ è un retratto di B.

d) Se ogni funzione continua $X \to X$ ha almeno un punto fisso, allora anche ogni funzione continua $A \to A$ ha almeno un punto fisso.

Soluzione. La prima è falsa: ogni spazio si può retrarre su un suo punto, ma non ogni spazio è contraibile. La seconda è vera: se r è la retrazione e i l'inclusione, si ha $ri = id_A$ e $ir \sim id_X \sim cost$ quindi A è anch'esso contraibile. La (c) è falsa: basta prendere $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, A = S^1, B = \{x = 0\} \setminus \{(0,0)\}$. Infine la (d) è vera. Se $f \colon A \to A$ è continua, $ifr \colon X \to X$ ha un punto fisso $x = ifr(x) = if(a) = i(a') = a' \in A$. □

Esercizio 120. *Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus (\{x = y = 0\} \cup \{z = 0, x^2 + y^2 = 1\})$.*

Soluzione. Tale sottoinsieme è ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z la porzione di semipiano $X = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, (r, z) \neq (1, 0)\}$. Allora il suo gruppo fondamentale è $\pi_1(X \times S^1) = \pi_1(X) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. $\square$

4.6 Esercizi su rivestimenti

Esercizio 121. *Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Provare che se X è di Hausdorff anche E è di Hausdorff.*

Soluzione. Siano $e_1, e_2 \in E$ due punti distinti. Ci sono due casi:

- $p(e_1) = p(e_2) = x$ e allora esiste un aperto banalizzante $V \ni x$ tale che $p^{-1}(V) = \bigcup U_i$ ed esistono due indici tali che $e_1 \in U_{i_1}$ e $e_2 \in U_{i_2}$, altrimenti la restrizione $p\colon U_i \to V$ non sarebbe iniettiva. Poiché gli U_i sono a due a due disgiunti, ho la tesi.

- $x_1 = p(e_1) \neq p(e_2) = x_2$. Dunque esistono due aperti banalizzanti $V_i \ni x_i$ e $p^{-1}(V_i)$ sono aperti disgiunti contenenti rispettivamente i punti e_i.

$\square$

Esercizio 122. *Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento di grado d. Se X è compatto, anche E è compatto.*

Soluzione. Sia $\{A_i\}$ un ricoprimento aperto di E. Allora $\{p(A_i)\}$ è un ricoprimento aperto di X in cui $p(A_i) = \bigcup_j V_{ij}$ dove ogni V_{ij} è un aperto banalizzante. Per ognuno dei V_{ij} considero le componenti connesse*** di $p^{-1}(V_{ij})$, le quali formano un ricoprimento di E al variare degli indici i e j e tale ricoprimento raffina il ricoprimento di partenza. Essendo X compatto, c'è un numero finito di coppie (i, j) tali che i rispettivi aperti banalizzanti ricoprono X. Si ha dunque $X = V_1 \cup \cdots \cup V_t$ e E si può scrivere come unione di $d \cdot t$ aperti, ciascuno dei quali contenuto in uno degli A_i per qualche i. Allora ho trovato un sottoricoprimento di $d \cdot t$ aperti di E. $\square$

Esercizio 123. *Si consideri l'omeomorfismo $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definito ponendo $f(z) := 5z$. Sia $G = \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ il gruppo generato da f per composizione. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

a) Lo spazio delle orbite $\mathbb{C}^*/G$ ammette $\mathbb{C}$ come rivestimento universale.

b) Esiste una mappa di rivestimento $\mathbb{C}^*/G \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

c) Esiste una mappa di rivestimento $\mathbb{C}^*/G \to S^1$.

d) L'intervallo $[0, 1]$ è un quoziente di $\mathbb{C}^*/G$.

Soluzione. L'omeomorfismo tra $\mathbb{C}^*$ e $S^1 \times \mathbb{R}$ induce un omeomorfismo tra il quoziente e $S^1/1 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dove l'azione di $\mathbb{Z}$ è data per traslazione. Si deduce che $\mathbb{C}^*/G$ è omeomorfo al toro $T = S^1 \times S^1$, che è rivestito da $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ tramite il prodotto della mappa esponenziale $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$. Quindi (a) è vera. L'affermazione (b) è falsa, perché altrimenti il gruppo fondamentale del toro sarebbe finito. Anche (c) è falsa, altrimenti $\mathbb{R}^2$ sarebbe omeomorfo ad $\mathbb{R}$. Infine (d) è vera perché possiamo proiettare T sul primo fattore S^1, e proiettare a sua volta S^1 sull'intervallo $[-1,1]$ per proiezione ortogonale. Si ottiene così una mappa continua e suriettiva $q\colon T \to [-1,1] \simeq [0,1]$, e la topologia naturale di $[-1,1]$ è quella quoziente, perché q è anche chiusa, in quanto mappa continua tra spazi di Hausdorff compatti. □

Esercizio 124. *Si consideri l'azione di Z_2 su $\mathbb{R}$ definita ponendo $\pm 1 \cdot x = \pm x$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$ è compatto.

b) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$ è di Hausdorff.

c) L'azione è propriamente discontinua.

d) La proiezione canonica $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$ è il rivestimento universale di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$.

Soluzione. Il quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}_2$ è omeomorfo a $[0,+\infty)$ tramite $x \mapsto |x|$. Allora non è compatto ed è di Hausdorff. Inoltre $p^{-1}(0) = 0$ perciò l'azione non è propriamente discontinua e la fibra per $x \neq 0$ è $p^{-1}(x) = \{-x, x\}$ che ha cardinalità differente dalla fibra di 0, perciò la proiezione non può essere un rivestimento. □

Esercizio 125. *Si consideri l'omeomorfismo $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definito ponendo $f(z) = \overline{z}$, e sia G il gruppo formato da f e da $id_{\mathbb{C}^*}$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere.*

1. *L'azione di G su C^* è propriamente discontinua.*
2. *C^*/G è omeomorfo a $\mathbb{C}^*$.*
3. *La proiezione quoziente $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*/G$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Il quoziente è omeomorfo al semipiano $\{Im(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$ quindi è semplicemente connesso. In particolare non può essere omeomorfo a $\mathbb{C}^*$ e la proiezione non può essere un rivestimento (inclusione impossibile tra i gruppi fondamentali). Da questo segue in particolare che l'azione non può essere propriamente discontinua (altrimenti la proiezione sarebbe un rivestimento). □

Esercizio 126. *Sia $p\colon E \to X$ un omeomorfismo locale di spazi connessi di Hausdorff. Dimostrare che se E è compatto, allora p è un rivestimento di grado finito.*

Soluzione. Sappiamo che p è un'applicazione aperta, ed essendo tra uno spazio compatto e uno spazio T_2 è anche chiusa. Allora $p(E)$ è aperta e chiusa, pertanto p è surgettiva. Preso $x \in X$, $p^{-1}(x)$ è discreta e chiusa in un compatto di Hausdorff, pertanto è finita. Per ogni $e \in p^{-1}(x)$, esistono $U \ni e$, $V \ni x$ aperti tali che la restrizione $p\colon U \to V$ è un omeomorfismo. Possiamo suppore gli aperti U disgiunti al variare di e. Il chiuso $C = E \setminus \bigcup U$ è tale che l'aperto $X \setminus p(C)$ è banalizzante ed è un intorno di x. $\square$

Esercizio 127. *Sia $G \subseteq Omeo(E)$, con E spazio topologico localmente compatto di Hausdorff. Si supponga che G agisca liberamente su E e che $\forall K \subseteq E$ compatto $g(K) \cap K = \varnothing$ per al più un numero finito di $g \in G$. Allora G agisce in modo propriamente discontinuo e il quoziente è localmente compatto di Hausdorff.*

Soluzione. Per ogni punto $e \in E$ esiste un intorno K compatto. La sua parte interna è tale che $g(\overset{\circ}{K}) \cap \overset{\circ}{K} = \varnothing$ per un numero finito di $g \in G$, e questo dice che l'azione è propriamente discontinua. Inoltre la proiezione al quoziente è un rivestimento, per cui ogni punto del quoziente ha un intorno che è aperto banalizzante U. Ma la restrizione $p^{-1}(U) \supset V \to U$ è omeomorfismo, dunque poiché $e \in V$ possiede un intorno compatto $K \subseteq V$, la sua immagine $p(K)$ è un intorno compatto di $x \in U \subseteq E/G$. Proviamo che $X = E/G$ è di Hausdorff. Presi $x \neq y \in X$, esistono e_1, e_2 tali che $p(e_1) = x, p(e_2) = y$, allora consideriamo due intorni disgiunti U, V degli e_i contenuti nelle fibre degli aperti banalizzanti. Le loro immagini sono intorni disgiunti di x e y. $\square$

4.7 Esercizi vari sui teoremi di Borsuk, Brouwer

Esercizio 128. *Sia* $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ *un'applicazione continua tale che* $f(-x) = -f(x)$ *per ogni* $x \in S^2$*. Allora esiste* $x \in S^2$ *tale che* $f(x) = 0$*.*

Soluzione. Per il teorema di Borsuk esiste almeno un punto tale che $f(x) = f(-x) = -f(x)$. □

Esercizio 129 (Teorema del cocomero)**.** *Per ogni punto* c *di un cocomero posso trovare un piano passante per* c *che divide la polpa e i semi in parti uguali.*

Dimostrazione. Il cocomero è un D^3 e posso supporre c origine degli assi in $\mathbb{R}^3$. Considero il vettore $f(x) = (p_+ - p_-, s_+ - s_-)$ per ogni $x \in S^2$. Dove i simboli nel vettore indicano la quantità di polpa e semi nel semipiano $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y\rangle \geq 0\}$ e $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y\rangle \leq 0\}$ rispettivamente. L'applicazione $x \to f(x)$ tra S^2 e $\mathbb{R}^2$ è continua e vale $f(-x) = -f(x)$ perciò esiste un punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$, il che dà la tesi. □

Esercizio 130 (Teorema di Lusternik-Schnirelmann)**.** *Siano* $A_1, A_2, A_3 \subseteq S^2$ *tre chiusi tali che* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S^2$*. Dimostrare che esiste almeno un indice* i *tale che il chiuso* A_i *contiene una coppia di punti antipodali.*

Dimostrazione. Siano $B_i = \{-x \mid x \in A_i\}$ e supponiamo $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \varnothing$. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} f\colon S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto \left(\frac{d_{A_1}(x)}{d_{A_1}(x) + d_{B_1}(x)}, \frac{d_{A_2}(x)}{d_{A_2}(x) + d_{B_2}(x)}\right) \end{aligned}$$

che è ben definita perché i denominatori non si annullano per ipotesi. Allora esiste x tale che $f(x) = f(-x)$ ma si ha che $x \notin A_1$ e $x \notin A_2$ altrimenti avrei un assurdo. Perciò $x \in A_3$ e di conseguenza anche $-x \in A_3$. □

5 Implicazioni

Riporto di seguito una tabella con le imlicazioni tra le varie proprietà topologiche in uno spazio (le righe implicano le colonne).

Piccola legenda:

$$\begin{aligned}
reg &= regolare \\
norm &= normale \\
metr &= metrico \\
cmpt &= compatto \\
Lcmpt &= localmente\ compatto \\
conn &= connesso \\
Lconn &= localmente\ connesso \\
Pconn &= connesso\ per\ archi \\
N1 &= primo - numerabile \\
N2 &= a\ base\ numerabile \\
sep &= separabile \\
Lind &= Lindelöf \\
parac &= paracompatto
\end{aligned}$$

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	reg	norm	metr
T_0	$\surd$	-	-	-	-	-	-	-
T_1	$\surd$	$\surd$	No	No	No	T_3	T_4	No
T_2	$\surd$	$\surd$	$\surd$	No	cmpt		parac	
T_3	?	No		$\surd$		T_1		
T_4	?	No			$\surd$		T_1	
reg	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$		$\surd$	Lind/N2	
norm	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	
metr	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$

	parac	convesso	cmpt	Lcmpt	conn	Lconn	Pconn
parac						$\surd$	
convesso							$\surd$
		$\surd$		$\surd$			
cmpt						$\surd$	
$\surd$	$\surd$						
Lcmpt							
	$\surd$						
conn							
		$\surd$					
Lconn							
			$\surd$				
Pconn							
		$\surd$		$\surd$			

	N1	N2	sep	Lind	metr
N1	$\surd$				
N2	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	
sep		metrico	$\surd$		
Lind				$\surd$	
metr	$\surd$				$\surd$

`Mantra`

Proposizioni utili da sapere (e facili da dimostrare)

- Un denso interseca ogni aperto dello spazio.
- f chiusa e bigettiva $\Leftrightarrow$ f omeomorfismo.
- f aperta e bigettiva $\Leftrightarrow$ f omeomorfismo.
- L'immagine continua di un denso è densa nell'immagine.
- L'immagine inversa tramite un'applicazione aperta di un denso è densa.
- $\mathbb{Q}$ non è intersezione numerabile di aperti di $\mathbb{R}$.
- Esistono funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue in tutti e soli i punti irrazionali, ma *non* esistono continue in tutti e soli i punti razionali.
- La topologia indotta da una distanza è la meno fine per cui le palle aperte sono aperti.
- Un insieme è aperto in un sottospazio aperto *sse* è aperto nello spazio.
- Un insieme è chiuso in un sottospazio chiuso *sse* è chiuso nello spazio.
- f chiusa ed iniettiva è una immersione chiusa.
- f aperta ed iniettiva è una immersione aperta.

- La topologia prodotto è la *meno fine* tra quelle che rendono le proiezioni continue.
- Un sottoinsieme finito in uno spazio T_2 è chiuso.
- Uno spazio è di Hausdorff se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.
- Uno spazio è di Hausdorff se e solo se

$$\forall x \in X \quad \{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} \overline{U}$$

- L'immagine continua di un connesso è connesso.
- Unione di spazi connessi (per archi) a intersezione non vuota è connessa (per archi).
- In $\mathbb{R}$ sono equivalenti *connesso* $\iff$ *convesso* $\iff$ *connesso per archi* $\iff$ *intervallo*.
- Ogni sottospazio tra un connesso e la sua chiusura è connesso.
- $\forall x \in X\ \exists U \ni x$ connesso $\Rightarrow$ le componenti connesse di X sono aperte.
- Spazi omeomorfi hanno lo stesso numero di componenti connesse.
- Ricoprimenti aperti e ricoprimenti chiusi localmente finiti sono *fondamentali*.
- Un insieme finito è compatto, uno spazio discreto è compatto *sse* finito.
- L'immagine continua di un compatto è compatto.
- Un chiuso in un compatto è compatto.
- Unione finita di compatti è compatto.
- In $\mathbb{R}^n$ compatto $\iff$ chiuso e limitato.
- Un compatto in un T_2 è chiuso.
- $f\colon X \to Y$ con X compatto e Y T_2 è chiusa.
- La compattificazione di Alexandroff di X è T_2 se e solo se X è di Hausdorff e localmente compatto.
- Quozienti di compatti sono compatti e quozienti di connessi sono connessi.
- X T_2, $G \subseteq Omeo(X)$ finito $\Rightarrow X/G T_2$.

- X T_2, $G \subseteq Omeo(X)$, allora X/G è $T_2 \iff K = \{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\}$ è chiuso in $X \times X$.

- Gli spazi proiettivi reali e complessi sono compatti, connessi e di Hausdorff.

- In uno spazio localmente compatto di Hausdorff, ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni compatti.

- Compatto ed $N1 \Rightarrow$ compatto per successioni.

- Se X è $N2$ sono equivalenti *compatto* $\iff$ *compatto per successioni* $\iff$ ogni successione ha punti di accumulazione.

- Metrico completo $\Rightarrow$ di Baire.

- Localmente compatto di Hausdorff $\Rightarrow$ di Baire.

- In uno spazio paracompatto di Hausdorff ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni chiusi.

- Normale ed $N2 \Rightarrow$ metrizzabile.

- Spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti (ma non viceversa: $\mathbb{R}^n$ è contrattile!)

- Spazio contraibile $\Rightarrow$ semplicemente connesso. (Per il `non` viceversa S^n per $n \geq 2$).

- Un rivestimento è omeomorfismo locale, ma un omeomorfismo non è necessariamente surgettivo, quindi in generale non è un rivestimento (ad esempio una immersione aperta).

- Il grado del rivestimento è la cardinalità della fibra (se questa è finita).

- Se un gruppo G agisce in modo propriamente discontinuo, ed E/G è connesso, la proiezione al quoziente è un rivestimento.

- I cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ sono omotopi $\iff$ lo sono i loro sollevamenti e questi hanno gli stessi estremi.

- X, E connessi per archi, $p\colon E \to X$ rivestimento, X semplicemente connesso. Allora p è omeomorfismo.

- Se X possiede rivestimenti connessi non banali non è semplicemente connesso.

- Non ci sono applicazioni continue "dispari" $f\colon S^2 \to S^1$.

- S^1 non è retratto del disco D^2.

- Ogni applicazione $f\colon D^2 \to D^2$ ha almeno un punto fisso.
- p rivestimento connesso $\Rightarrow p_* iniettivo$.
- $|p^{-1}(x)| = [\pi_1(X) : p_*(\pi_1(E))]$.
- E semplicemente connesso, G agisce in modo propriamente discontinuo su $E \Rightarrow \pi_1(E/G) = G$.
- $f\colon Y \to X$, p rivestimento di E su X. Posso sollevare f se e solo se $f_*(\pi_1(Y)) \subseteq p_*(\pi_1(E))$.
- Se G agisce in modo propriamente discontinuo, il rivestimento di E su E/G è regolare, e viceversa i rivestimenti regolari sono tutti e soli quelli ottenuti per quozienti di azioni propriamente discontinue.
- E compatto $\Rightarrow$ fibra del rivestimento finita $\Rightarrow$ se E semplicemente connesso $\pi_1(X)$ è finito (perché lo 0 ha indice finito).
- Se E è uno spazio semplicemente connesso, allora ogni rivestimento $p\colon E \to X$ è regolare.
- Se X è uno spazio connesso e $\pi_1(X)$ è abeliano, allora ogni rivestimento connesso $p\colon E \to X$ è regolare.
- Ogni rivestimento connesso di grado 2 è regolare: (ogni sottogruppo di indice 2 è normale).
- Se X ha un rivestimento universale connesso, allora il suo gruppo fondamentale ha cardinalità finita.
- Se uno spazio connesso riveste uno spazio semplicemente connesso, allora il rivestimento è un omeomorfismo.
-

`Proprietà che passano ai sottospazi`

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	reg	norm	metr	metr completo	cmpt	Lcmpt	Lind	conn	Pco
$\surd$	$\surd$	$\surd$					$\surd$	*sse* chiuso	chiuso	chiuso	chiuso	No.	No

`Proprietà che si mantengono nel prodotto`

T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	reg	norm	metr	Lcmpt	conn	sep	Lconn	Pconn
$\surd$	$\surd$	$\surd$					numerabili	$\surd$	$\surd$	numerabili		$\surd$

Tabella dei principali gruppi fondamentali

S^1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ per $n \geq 2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
Toro $\setminus$ punto	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$	$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	0
Wedge di n S^1	$\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$	Bottiglia di Klein $\setminus$ punto	$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$
Collana di S^2	0	Collana di n Tori	$\prod_*^n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$
S^n per $n \geq 2$	0	Bottiglia di Klein	$< a, b \mid bab = a >$
Nastro di Moebius	$\mathbb{Z}$		
7			
8			
9			
0			

Tabella dei rivestimenti universali

S^1	$\mathbb{R}$	$S^1 \times S^1$	$\mathbb{R}^2$
		Bottiglia di Klein	$\mathbb{R}^2$
7			
8			
9			
0			

6 Conclusion

"I always thought something was fundamentally wrong with the universe" [1]

7 Appendice

Diamo in questa appendice miscellanea di risultati e approfondimenti su argomenti vari.

Definizione $X+Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$ è detta unione disgiunta, o somma di spazi topologici.

Osservazione $X + X \neq X \cup X = X$.

Teorema 7.1. *Sia X uno spazio topologico connesso e dia $\mathcal{P}(x)$ una proprietà su X. Se si verificano le condizioni:*

1. $\exists x \in X : \mathcal{P}(x)$
2. $\forall x : \mathcal{P}(x)\ \exists U_x x \in U_x : \forall y \in U_x\ \mathcal{P}(y)$
3. $\neg\mathcal{P}(x) \Rightarrow \exists V_x\ \neg\mathcal{P}(x)\ \forall y \in V_x$

Allora si verifica che $\forall x \in X\ \mathcal{P}(x)$.

Osservazione Se su X ho la topologia banale, ogni successione converge ad ogni punto!

Teorema 7.2. *Sia X uno spazio topologico compatto e $\mathcal{P}$ una proprietà su X tale che se U e V sono sottoinsiemi di X, $\mathcal{P}(U) \wedge \mathcal{P}(V) \Rightarrow \mathcal{P}(U \cup V)$. Allora se $\exists U_x :\ \mathcal{P}(U_x) \Rightarrow \mathcal{P}(X)$.*

Teorema 7.3. *Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua e bigettiva. Se X è compatto e Y è di Hausdorff, allora f è un omeomorfismo.*

Lemma 7.4. *Siano X e Y spazi topologici, Y $\mathcal{T}_2$ e $A \subseteq X$ un denso in X. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ due funzioni continue ceh coincidono su A. Allora f e g coincidono ovunque.*

Diamo ora una dimostrazione di un importante teorema di topologia generale: il ***Lemma di Urysohn***.

Lemma 7.5. ***(di Urysohn)*** *Se X è uno spazio normale, per ogni coppia di chiusi disgiunti A, B di X, esiste una funzione continua $f\colon X \to [0,1]$ a valori nell'intervallo $I = [0,1]$, che valga 0 su tutto A e 1 su B.*

Dimostrazione. Prima di procedere con la dimostrazione, facciamo un paio di osservazioni preliminari.

Osservazione 1 Se X è uno spazio metrico, il lemma di Urysohn vale banalmente: basta considerare la funzione

$$f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)} \tag{1}$$

dove $d_Z(x) := \inf\{d(x,z) \mid z \in Z \subset X\}$.

Osservazione 2 Il problema posto è risolubile per due sottoinsiemi qualunque A e B se e solo se lo è per le loro chiusure $\overline{A}$ e $\overline{B}$, perché $\forall f\colon X \to \mathbb{R}$ continua, $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(0)$ sono chiusi. Dunque la condizione che A e B siano chiusi non è restrittiva.

Osservazione 3 Condizione necessaria è che A e B siano separabili tramite aperti disgiunti, perché $f^{-1}\big((\frac{3}{4}, 1]\big)$ e $f^{-1}\big([0, \frac{1}{4})\big)$ sono intorni aperti e disgiunti di A e B. Da qui la richiesta che X sia uno spazio normale.

Otterremo la funzione f come limite di funzioni costanti a tratti. Definire una successione di funzioni siffatte equivale a definire una catena di insiemi

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset (X \setminus B)$$

Osservazione 4 Il bordo ∂A_{i-1} non deve *mai* toccare quello ∂A_i, altrimenti il *salto* della funzione sarebbe *troppo alto* e non ci sarebbe continuità nel punto di contatto.
Se lo spazio è normale, ho però la proprietà che $\forall M \subset X\ \forall N \subset X$ tali che $\overline{M} \subseteq \mathring{N}$ allora $\exists L \subset X$ che verifica $\overline{M} \subset \mathring{L} \subset \overline{L} \subset \mathring{N}$ poiché posso separare M e $X \setminus N$ con opportuni intorni aperti U e V (per esempio prendendo $L = U$).

Dico che la catena crescente di sottoinsiemi di X $\mathfrak{U} = (A_0, \ldots, A_r)$ è *ammissibile* se vale $\overline{A_{i-1}} \subset \mathring{A}_i\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Tale condizione è ben posta per l'*Osservazione 4*.
Ora definisco $f_r\colon X \to [0,1]$ ponendo $f_r(A) = 1$, $f_r(A_k \setminus A_{k-1}) = 1 - \frac{k}{r}$ e $f \equiv 0$ fuori da A_r. Gli insiemi aperti $\mathring{A}_{k+1} \setminus \overline{A_{k-1}}$ li chiameremo *gradini* di $\mathfrak{U}$ e tale funzione f_r è la *funzione uniforme a gradini* della catena $\mathfrak{U}$. Per convenzione poniamo $A_{-1} = \varnothing$ e $A_{r+1} = X$. Si può osservare che i *gradini* ricoprono l'intero spazio dato che $\overline{A_k} \setminus \overline{A_{k-1}} \subset \mathring{A} \setminus \overline{A_{k-1}}$ e le f_r non variano più di $\frac{1}{r}$ su ciascun gradino.
Partendo da $\mathfrak{U}_o = (A,\ X \setminus B)$ possiamo *raffinare* le catene ammissibili $\mathfrak{U}_r$ grazie alla proprietà di separazione e ottenere $\mathfrak{U}_{r+1} = (A_0, A_1', A_1, \ldots, A_r', A_r)$. In tal modo la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e limitata e quindi converge a $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ che è la funzione cercata.
Infatti f è continua: $|f(x) - f_n(x)| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$; e f_n non varia più di $\frac{1}{2}$ su ogni gradino di $\mathfrak{U}_n$. Quindi f non può variare più di $\frac{1}{2^{n-1}}$ su ogni gradino. $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ e il gradino di $\mathfrak{U}_n$ che contiene x è tale che $f(\mathfrak{U}_n) \subseteq (f(x) - \epsilon, f(x) + \varepsilon)$, cioè $\mathfrak{U}_n$ è a valori nell'intervallo centrato in $f(x)$ e di raggio ε. Ciò implica che f è continua. Per costruzione si ha poi $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$. $\square$

`La proiezione stereografica`

Si chiama proiezione stereografica dal polo nord sul piano equatoriale, che identifichiamo con $\mathbb{R}^2$, l'applicazione

$$f\colon S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che se P è un punto di S^2 allora $N, P, f(P)$ sono allineati. Ricordiamo che $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e il punto $N = (0, 0, 1)$ è il *polo Nord* della sfera.
Cerchiamo l'espressione esplicita di f. Se $P' = (u, v, w)$ è un punto allineato con N e $P = (x, y, z)$, si ha $P' = \lambda N + (1 - \lambda)P$ per un opportuno λ reale. Imponiamo che P' appartenga a $\mathbb{R}^2$: esplicitando la relazione appena citatia si ha:

$$u = \lambda{\cdot}0+(1-\lambda)x = (1-\lambda)xv = \lambda{\cdot}0+(1-\lambda)y = (1-\lambda)y0 = w = \lambda{\cdot}1+(1-\lambda)z.$$

Dall'ultima uguaglianza si ottiene $\lambda = \frac{z}{(z-1)}$ e sostituendo nelle prime due si ha che $f\colon (x, y, z) \mapsto (u, v)$ dove

$$u = \frac{x}{1-z} \quad \text{e} \quad v = \frac{y}{1-z}.$$

Notiamo che vale la seguente proprietà:

Teorema 7.6. *La proiezione stereografica trasforma circonferenze della sfera in circonferenze o rette del piano equatoriale.*

Dimostrazione. . Sia C una circonferenza della sfera:

$$C := \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni trovate per x, y, z nella seconda equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} & 2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) + d(u^2 + v^2 + 1) && = 0 \\ \Rightarrow \quad & (c + d)(u^2 + v^2) + 2au + 2bv + d - c && = 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ passa per il polo nord N se e solo se $d = -c$. Dunque se il piano non passa per N l'espressione (3.5) è l'equazione di una circonferenza del piano equatoriale, altrimenti è l'equazione di una retta. $\square$

Possiamo generalizzare il concetto e definire in $\mathbb{R}^{n+1}$ la proiezione stereografica dal polo nord di S^n. Identifichiamo per semplicità $\mathbb{R}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. In tal modo un punto di $\mathbb{R}^{n+1}$ è visto come una coppia (ξ, η) con $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in \mathbb{R}$. Un punto $P(\xi, \eta)$ appartiene alla sfera S^n se e solo se

$\|\xi\|^2 + \eta^2 = 1$. Si chiama dunque *proiezione stereografica dal polo nord* l'applicazione

$$f \colon S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che $N, P, f(P)$ siano allineati per ogni $P \in S^n \setminus \{N\}$. Troviamo anche in questo caso l'espressione esplicita per f. Se Q è un punto allineato con $N(0,1)$ e $P(\xi, \eta)$ si ha

$$Q = \lambda N + (1-\lambda)P.$$

Imponiamo che Q appartenga a $\mathbb{R}^n$. $Q = (\bar{\xi}, 0)$, cioè

$$\begin{aligned} &\bar{\xi} = \lambda \cdot 0 + (1-\lambda)\xi = (1-\lambda)\xi; \\ &0 = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda)\eta. \end{aligned}$$

Dall'ultima si ottiene $\lambda = \frac{\eta}{\eta - 1}$ e quindi

$$f \colon (\xi, \eta) \longmapsto \frac{1}{1-\eta}\xi.$$

Si vede poi facilmente che

$$\begin{aligned} f^{-1} \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow S^n \\ \xi' &\longmapsto \left(\frac{2\xi'}{\|\xi'\|^2 + 1}, \frac{\|\xi'\|^2 - 1}{\|\xi'\|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Infatti, posto $\xi' = \frac{\xi}{1-\eta}$, si ha $\xi = \xi'(1-\eta)$ e quindi $\|\xi\|^2 = \|\xi'\|^2(1-\eta)^2$. Ma $\|\xi\|^2 + \eta^2 = 1$, dunque $\eta^2(\|\xi'\|^2 + 1) - 2\eta\|\xi'\|^2 + \|\xi'\|^2(1-\eta)^2 - 1 = 0$ da cui, risolvendo l'equazione, si ha $\eta = 1$ o $\eta = \frac{\|\xi'\|^2 - 1}{\|\xi'\|^2 + 1}$. La soluzione $\eta = 1$ si esclude, dunque si ha la tesi.

Osservazione Le applicazioni f, f^{-1} sono biunivoche e continue, anzi C^∞, il che prova che $S^n \setminus \{N\}$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$. La proiezione stereografica mostra anche che $\mathbb{R}^n$ si può "compattificare" (seguendo Alexandroff) mediante l'aggiunta di un solo punto (detto punto improprio), cioè $S^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = \mathbb{R}^n$. Inoltre $S^1 \cong \mathbb{R} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e $S^2 \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, come già provato nella sezione di geometria proiettiva. Più in generale, se P è un punto di S^n ed H un iperpiano parallelo all'iperpiano tangente a S^n in P e differente da questo iperpiano, si chiama *proiezione stereografica di S^n* l'applicazione

$$f \colon S^n \setminus \{P\} \longrightarrow H$$

tale che, se $Q \in S^n \setminus \{P\}, P, Q$ e $f(Q)$ sono allineati. Si suole considerare H passante per il centro di S^n oppure tangente nel punto antipodale di P.

Una piccola ***curiosità storica***: Il termine "proiezione stereografica" deriva dalle parole greche $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ (corpo solido) e $\gamma\rho\alpha\phi\eta$ (disegno) e fu introdotto nel 1613 dal gesuita F. d'Aguilon (1567 – 1617), autore di un trattato di ottica, *Opticorum libri sex*, nel quale appare uno studio approfondito della proiezione ortogonale e centrale. Il volume era illustrato con acqueforti del Rubens, amico dell'autore.

Riferimenti bibliografici

[1] D. Adams. *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*. San Val, 1995.